

ARBEITSBERICHTE DES INSTITUTS FÜR MATHEMATISCHE MASCHINEN UND DATENVERARBEITUNG (INFORMATIK)

FRIEDRICH ALEXANDER UNIVERSITÄT ERLANGEN NÜRNBERG

HERAUSGEBER: H. Billing, W. Händler, U. Herzog,
F. Hofmann, K. Leeb, P. Mertens, H. Müller, G. Nees, H. Niemann,
D. Seitzer, B. Schmidt, H.J. Schneider, H. Wedekind

BEITRÄGE ZUR ALGEBRAISCHEN THEORIE DER FORMALEN SPRACHEN

Roman König

DISSERTATION

BAND 16 · NUMMER 2 · ERLANGEN · MÄRZ 1983

ISSN 0344 - 3515



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546217_0018

BEITRÄGE ZUR ALGEBRAISCHEN THEORIE DER FORMALEN SPRACHEN

Der Technischen Fakultät
der Universität Erlangen-Nürnberg
zur Erlangung des Grades
DOKTOR - INGENIEUR

vorgelegt

von

Roman König

Erlangen 1982



Als Dissertation genehmigt von der
Technischen Fakultät der
Universität Erlangen-Nürnberg

Tag der Einreichung: 14.12.1982

Tag der Promotion: 02.03.1983

Dekan: Prof. Dr. U. Zwicker

Berichterstatter: Prof. Dr. K. Leeb

Prof. Dr. D. Perrin

Abstract

KÖNIG, ROMAN

BEITRÄGE ZUR ALGEBRAISCHEN THEORIE DER FORMALEN SPRACHEN.

Es werden E-Varietäten definiert und ihre Eigenschaften untersucht. E-Varietäten stehen in bijektiver Beziehung zu den M-Varietäten. Ein analoger Satz zum Theorem von EILENBERG wird bewiesen. Innerhalb der Theorie der E-Varietäten lassen sich viele Tatsachen einfacher formulieren und beweisen als für *-Varietäten. Durch die Verschärfung eines Lemmas von I. SIMON gewinnt man einen einfachen Beweis für die Beziehung zwischen den stückweise testbaren Sprachen und den $\mathcal{J}$ -trivialen Monoiden. Für Äquivalenzrelationen wird eine Operation erklärt, mit der es gelingt, die Eigenschaften des Konkatenationsprodukts zu untersuchen. In ähnlicher Weise wird auch das Shuffle-Produkt behandelt. Es zeigt sich, daß Konkatenations- und Shuffle-Produkt sehr ähnliche Eigenschaften besitzen.

I N H A L T

Einige Bezeichnungen	6
§ 0 Einführung	9
§ 1 Syntaktische Kongruenzen	15
§ 2 Varietäten	33
§ 3 Konstruktion von Varietäten	56
§ 4 Testbarkeit	85
§ 5 Multiplikative Abgeschlossenheit	118
§ 6 Ein Sonderfall	141
§ 7 Der Fall $\rho^2 = \rho$	152
§ 8 Shuffle-Produkt	158
Literatur	178

Einige Bezeichnungen

Etwaige ungeklärte Begriffe oder Bezeichnungen sind wie in EILENBERG [4] verwendet.

Σ, Γ	endliche Alphabete
Σ^+	freie Halbgruppe über Σ
Σ^*	freies Monoid über Σ
Λ	leeres Wort (= Einselement von Σ^*)
$L \subseteq \Sigma^+, L \subseteq \Sigma^*$	Sprachen über Σ
$L_1 \cdot L_2$	$\{\ell_1 \cdot \ell_2 \mid \ell_1 \in L_1, \ell_2 \in L_2\}$, wobei L_1, L_2 Teilmengen einer Halbgruppe S sind und $\cdot$ die Multiplikation in S ist
$L_1 \sqcup L_2$	Shuffle-Produkt von L_1 mit L_2 $= \phi^{-1}(\phi(L_1 \cdot L_2))$, wobei ϕ der kanonische Homomorphismus von Σ^* auf das freie kommutative Monoid über Σ ist.
$\Sigma^{(k)}$	$\Sigma \cup \Sigma \cdot \Sigma \cup \Sigma \cdot \Sigma \cdot \Sigma \cup \dots \cup \Sigma^k$

$ w $	Länge von $w \in \Sigma^*$.
$\text{End}(S)$	Menge der Endomorphismen der Halbgruppe (des Monoids) S .
$\text{Aut}(S)$	Automorphismengruppe von S .
$\mathcal{E}(M)$	Verband der Äquivalenzrelationen auf der Menge M .
$\mathcal{C}(S)$	Verband der Kongruenzrelationen auf der Halbgruppe S .
$\mathcal{C}^o(S)$	Verband der vollinvarianten Kongruenz- relationen auf der Halbgruppe S .
$[m]_\rho$	Die Äquivalenzklasse von $m \in M$ bezüglich $\rho \in \mathcal{E}(M)$.
π_L	Diejenige Äquivalenzrelation auf M (falls $L \subseteq M$) , die L und $M \setminus L$ als Äquivalenz- klasse besitzt. Also: $\pi_L = L \times L \cup (M \setminus L) \times (M \setminus L) .$
$\underline{\pi}$	$= \sup\{\rho \in \mathcal{C}(S) \mid \rho \leq \pi\}$, falls $\pi \in \mathcal{C}(S)$ und S Halbgruppe ist.

π $= \sup\{\rho \in \mathcal{V}(S) \mid \rho \subseteq \pi\}$ falls $\pi \in \mathcal{E}(S)$
und S Halbgruppe ist.

$\rho \circ \sigma$ Relationenprodukt von $\rho, \sigma \subseteq M \times M$
 $= \{(u, w) \in M \times M \mid \exists v \in M (u, v) \in \rho, (v, w) \in \sigma\}$.

$\text{nat } \rho$ Der kanonische Epimorphismus $S \rightarrow S/\rho$ für
eine Halbgruppe S und $\rho \in \mathcal{C}(S)$.

$\overline{R}$ die von einer Teilmenge $R \subseteq S \times S$ für eine
Halbgruppe S erzeugte Kongruenzrelation.

§ 0 Einführung

Die Bemühungen, mit algebraischen Hilfsmitteln Aussagen über formale Sprachen zu gewinnen, sind alt, auch wenn sie nicht immer als Theorie der formalen Sprachen erkannt oder deklariert waren (siehe z.B. [15]).

Breiteres Interesse für dieses Thema entwickelte sich erst, als man Antworten auf die Frage der Linguisten suchte: Wie mächtig ist das Hilfsmittel der formalen Grammatik? Dabei erwiesen sich im besonderen die Typen 2 und 3 in CHOMSKYS Hierarchie als zugänglich und der Typ 3 sogar als ergiebig. Ein wesentlicher Grund hierfür ist, daß die Klasse der Typ-3-Sprachen eine BOOLEsche Algebra bildet. Die ersten fundamentalen Aussagen betreffen daher die Typ-3-Sprachen:

- (1) Die Klasse der Typ-3-Sprachen ist die Klasse der (automaten-) erkennbaren Sprachen.
- (2) Die erkennbaren Sprachen sind die aus den Buchstaben mit Hilfe der Operationen $\cup$, $\cdot$ (= Konkatination) und $*$ ($L^* = \bigcup_{i \geq 0} L^i$ mit $L^0 = \{\Lambda\}$, $L^{k+1} = L^k \cdot L$) erzeugten Sprachen (Theorem von KLEENE).

- (3) Eine Sprache L ist genau dann erkennbar, wenn es eine Kongruenzrelation ρ auf Σ^* gibt, so daß ρ endlichen Index hat und L als Vereinigung gewisser ρ -Klassen darstellbar ist (Theorem von NERODE-MYHILL).

Da eine Sprache L genau dann erkennbar ist, wenn $L \setminus \{\Lambda\}$ erkennbar ist, läßt sich (3) mit Hilfe des von SCHÜTZENBERGER eingeführten Begriffs der syntaktischen Halbgruppe bzw. des syntaktischen Monoids folgendermaßen formulieren:

- (3') Eine Sprache L ist genau dann erkennbar, wenn ihr syntaktisches Monoid (bzw. die syntaktische Halbgruppe von $L \setminus \{\Lambda\}$) endlich ist.

Dabei ist das syntaktische Monoid (die syntaktische Halbgruppe) von $L \subseteq \Sigma^*$ ($L \subseteq \Sigma^+$) der Quotient von Σ^* (von Σ^+) nach der größten Kongruenzrelation ρ auf Σ^* (auf Σ^+), für die gilt:

$$(a, b) \in \rho \implies (a \in L \iff b \in L).$$

Die Klasse aller syntaktischen Halbgruppen von erkennbaren Sprachen hat Abschlußeigenschaften, die sie zu einer Pseudovarietät (bei SCHÜTZENBERGER) bzw. S-Varietät (bei EILENBERG) machen. Andererseits besitzt die Klasse

aller erkennbaren Sprachen Abschlusseigenschaften, die sie zu einer +-Varietät machen.

Die fundamentale Tatsache, bekannt als EILENBERGs Theorem lautet: Jeder +-Varietät von Sprachen entspricht genau eine S-Varietät von Halbgruppen und umgekehrt.

Viele Ergebnisse über S-Varietäten und ihre zugehörigen +-Varietäten, die bis Mitte der siebziger Jahre gefunden wurden, allen voran SCHÜTZENBERGERS Theorem über die aperiodischen Sprachen, wurden gesammelt, geschlossen dargestellt und weiterentwickelt in EILENBERGs Band B über Automata, Languages and Machines.

Die Fragen, die man sich nun stellt, sind einteilbar in folgende Typen:

- Welche kombinatorischen Eigenschaften einer Grammatik entsprechen welchen algebraischen Eigenschaften des syntaktischen Monoids der von ihr erzeugten Sprache und umgekehrt?

- Welche Abschlusseigenschaften einer Klasse von formalen Sprachen entsprechen welchen Abschlusseigenschaften für die Klasse ihrer syntaktischen Monoide und umgekehrt?

Die vorliegende Arbeit soll einige Fragen dieser Art beantworten und einige Hilfsmittel bereitstellen, um Fragen dieser Art auf einfachere Weise als bisher beantworten zu können.

Die einfache Beobachtung, die diesen Betrachtungen zugrunde liegt, ist folgende:

Die Atome jeder endlichen BOOLEschen Algebra $B \subseteq 2^A$ auf einer Menge A bilden eine Äquivalenzrelation auf A .

Umgekehrt definiert jede Äquivalenzrelation auf A eine BOOLEsche Algebra $\subseteq 2^A$. Die von den Klassen zweier Äquivalenzrelationen auf A erzeugte BOOLEsche Algebra $\subseteq 2^A$ hat als Atome die Klassen des Durchschnitts der beiden gegebenen Äquivalenzrelationen. Die weiteren Abschluß-eigenschaften, die +-Varietäten definieren, lassen sich leicht übertragen, so daß der neue Begriff der E-Varietät entsteht, der "zwischen" +-Varietät und S-Varietät liegt.

In § 1 werden einige grundlegende Dinge über erkennbare Sprachen und ihre syntaktischen Kongruenzen bereitgestellt.

In § 2 werden Varietäten definiert und verschiedene Eigenschaften und Charakterisierungsmöglichkeiten angegeben.

Der § 3 führt einige Methoden vor, um aus bereits vorhandenen neue Varietäten zu konstruieren.

In § 4 werden die in den vorhergehenden Paragraphen bereitgestellten Hilfsmittel auf einige konkrete Situationen angewandt. Insbesondere erhält man durch die Verschärfung eines Lemmas von I. SIMON (Theorem 21) einen einfacheren Beweis für die Charakterisierung der aus den $\mathcal{J}$ -trivialen Monoiden bestehenden Varietät ($\hat{=}$ stückweise testbare Sprachen).

In § 5 wird gezeigt, was das Analogon zum Konkatenationsprodukt auf der Seite der E-Varietäten ist. Einige bekannte Tatsachen lassen sich dadurch ganz zwanglos beweisen.

Diese neue Operation wird in § 6 benutzt, um zwei Klassen von E-Varietäten zu definieren.

§ 7 zeigt, daß keine endliche BOOLEsche Algebra $\leq 2^{\Sigma^*}$ multiplikativ abgeschlossen sein kann.

Schließlich wird in § 8 das Shuffle-Produkt in ähnlicher Weise wie das Konkatenationsprodukt auf E-Varietäten übertragen. Da bisher unbekannt ist, welche Operation dem Shuffle-Produkt auf der Ebene der M-Varietäten entspricht,

E-Varietäten den M-Varietäten aber näher stehen als die *-Varietäten, ist damit ein Schritt zur Lösung dieses Problems gelungen.

An dieser Stelle danke ich Herrn Professor K. Leeb für das Interesse, das er dem Fortgang der Arbeit entgegenbrachte, sowie meinen Kollegen M. Becker und V. Strehl für ihre ständige Bereitschaft zum Gespräch und manchen Hinweis. Besonderen Dank schulde ich den Herren Prof. D. Perrin und J.E. Pin. Aus den Diskussionen mit ihnen ergaben sich Anregungen und Ideen, die den Fortgang der Arbeit stark beeinflußt haben. Schließlich gilt mein Dank Frau C. Matejka, die aus dem Manuskript eine so vorzügliche Reinschrift angefertigt hat.

§ 1

Syntaktische Kongruenzen

Es sei M ein Monoid. $\mathcal{E}(M)$ bezeichne den Verband aller Äquivalenzrelationen auf M , $\mathcal{C}(M)$ den Verband aller Kongruenzrelationen auf M . $\mathcal{E}(M)$ und $\mathcal{C}(M)$ sind vollständige Verbände, und zwar ist $\mathcal{C}(M)$ ein Unterverband von $\mathcal{E}(M)$, für den die Inklusionsabbildung $\mathcal{C}(M) \longrightarrow \mathcal{E}(M)$ ein Morphismus vollständiger Verbände, d.h. inf- und supstetig ist.

Für das inf ist das klar, denn inf-Bildung in $\mathcal{E}(M)$ heißt Durchschnittsbildung und der Durchschnitt einer beliebigen Familie von Kongruenzrelationen ist wieder eine Kongruenzrelation. Für $R \in \mathcal{C}(M)$ ist

$$\begin{aligned}\sigma_1 &:= \sup_{\mathcal{C}(M)} R = \inf \{ \tau \mid \tau \in \mathcal{C}(M), \forall \rho \in R \tau \supseteq \rho \} \\ \sigma_2 &:= \sup_{\mathcal{E}(M)} R = \inf \{ \tau \mid \tau \in \mathcal{E}(M), \forall \rho \in R \tau \supseteq \rho \}\end{aligned}$$

Also gilt $\sigma_2 \subseteq \sigma_1$. σ_2 ist aber eine Kongruenzrelation, denn für $(a,b) \in \sigma_2$ gibt es $c_1, \dots, c_n \in M$ mit

$$\begin{aligned}a &= c_1 \\ (c_1, c_2) &\in \rho_1 \\ &\vdots \\ (c_{n-1}, c_n) &\in \rho_{n-1} \\ c_n &= b\end{aligned}$$

für geeignete $\rho_1, \dots, \rho_{n-1} \in R$.

Da die ρ_i Kongruenzrelationen sind, ist für $c \in M$ auch

$$(c_i c, c_{i+1} c) \in \rho_i$$

und

$$(c c_i, c c_{i+1}) \in \rho_i$$

also auch

$$(a c, b c) \in \sigma_2$$

$$(c a, c b) \in \sigma_2$$

Daher gilt $\sigma_2 = \sigma_1$.

Eine Kongruenzrelation $\rho \in \mathcal{C}(M)$ heißt *vollinvariant*, wenn gilt: für jeden Endomorphismus $f : M \longrightarrow M$ folgt aus $(a, b) \in \rho$ auch $(f(a), f(b)) \in \rho$. Analog zum obigen Fall beweist man: Die Menge $\mathcal{V}(M)$ aller vollinvarianten Kongruenzrelationen auf M ist ein vollständiger Unterverband von $\mathcal{C}(M)$ und die Einbettung $\mathcal{V}(M) \longrightarrow \mathcal{C}(M)$ ist inf- und sup-stetig.

Für $\pi \in \mathcal{E}(M)$ sei

$$\pi := \sup\{\tau \mid \tau \in \mathcal{C}(M), \tau \leq \pi\}$$

$$\pi := \sup\{\tau \mid \tau \in \mathcal{V}(M), \tau \leq \pi\}$$

$$\bar{\pi} := \inf\{\tau \mid \tau \in \mathcal{C}(M), \tau \geq \pi\}$$

$$\bar{\pi} := \inf\{\tau \mid \tau \in \mathcal{V}(M), \tau \geq \pi\}.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}\underline{\pi} &= \{(u,v) \in \pi \mid \forall a,b \in M \ (a \cup b, a \vee b) \in \pi\} \\ \mathfrak{U} &= \{(u,v) \in \pi \mid \forall f \in \text{End}(M) \ (f(u), f(v)) \in \underline{\pi}\}\end{aligned}$$

wobei $\text{End}(M)$ die Menge aller Endomorphismen $f : M \longrightarrow M$ bezeichnet, und

$$\begin{aligned}\bar{\pi} &= \{(a \cup b, a \vee b) \mid a,b \in M, (u,v) \in \pi\} \\ \tilde{\pi} &= \{(f(u), f(v)) \mid f \in \text{End}(M), (u,v) \in \bar{\pi}\}.\end{aligned}$$

$\underline{\pi}$ heiße syntaktische Kongruenz zu π , $M/\underline{\pi}$ das zugehörige syntaktische Monoid. π heißt erkennbar, wenn $\underline{\pi}$ endlichen Index besitzt, d.h. wenn $M/\underline{\pi}$ endlich ist. Es gilt

$$\tilde{\pi} \leq \underline{\pi} \leq \pi \leq \bar{\pi} \leq \tilde{\pi}$$

$$\underline{\pi} = \tilde{\pi}$$

$$\bar{\pi} = \tilde{\pi}$$

$$\underline{\pi} = \bar{\pi}$$

$$\tilde{\pi} = \tilde{\pi}$$

$$\underline{\pi} = \bar{\pi}$$

$$\tilde{\pi} = \tilde{\pi}$$

Lemma 1:

Für jede Teilmenge $A \subseteq \mathcal{C}(M)$ gilt:

$$a) \quad \underline{\inf A} = \inf_{\pi \in A} \underline{\pi}$$

$$b) \quad \inf_{\sim} A = \inf_{\pi \in A} \underline{\pi}$$

Beweis:

a) Wegen $\underline{\pi} \leq \pi$ ist

$$\inf_{\pi \in A} \underline{\pi} \leq \inf_{\pi \in A} \pi ,$$

also auch

$$\inf_{\pi \in A} \underline{\pi} \leq \underline{\inf A}$$

Umgekehrt sei $\rho \in \mathcal{C}(M)$, $\rho \leq \underline{\inf A}$.

Dann ist für jedes $\pi \in A$ $\rho \leq \pi$, wegen $\rho \in \mathcal{C}(M)$ also auch $\rho \leq \underline{\pi}$. Daher gilt

$$\rho \leq \inf_{\pi \in A} \underline{\pi} .$$

b) analog.

///

$\mathcal{E}_k(M)$ ($k \geq 1$) bezeichne die Menge aller Äquivalenzrelationen auf M mit Index k ,

$$\mathcal{E}_{\text{fin}}(M) := \bigcup_{k \geq 1} \mathcal{E}_k(M)$$

Lemma 2:

$\pi \in \mathcal{E}(M)$ ist genau dann erkennbar, wenn π darstellbar ist,
 $\pi = \pi_1 \cap \dots \cap \pi_k$ für ein $k \in \mathbb{N}$, wobei die $\pi_j \in \mathcal{E}_2(M)$
 und erkennbar sind ($j = 1, \dots, k$).

Beweis:

Es sei $\pi = \pi_1 \cap \dots \cap \pi_k$ mit den geforderten Eigenschaften.

Nach Lemma 1 ist

$$\underline{\pi} = \underline{\pi}_1 \cap \dots \cap \underline{\pi}_k \in \mathcal{E}_{\text{fin}}(M),$$

also π erkennbar.

Ist umgekehrt $\underline{\pi} \in \mathcal{E}_{\text{fin}}(M)$, so ist wegen $\underline{\pi} \leq \pi$

$\pi \in \mathcal{E}_{\text{fin}}(M)$. $A_1, \dots, A_{k+1}$ seien die Äquivalenzklassen von π .

Für $i = 1, \dots, k+1$ sei

$$\pi_i := \pi_{A_i} := (A_i \times A_i) \cup ((M \setminus A_i) \times (M \setminus A_i)) \in \mathcal{E}_2(M).$$

Dann ist π darstellbar als Durchschnitt von je k dieser $k+1$ Äquivalenzrelationen.

Wegen $\underline{\pi} \leq \pi_i$ ist π_i erkennbar für jedes $i = 1, \dots, k+1$. ///

Für $\pi \in \mathcal{E}(M)$ und $u \in M$ sei

$$\begin{aligned} u^{-1}\pi &= \{ (v, w) \mid (uv, uw) \in \pi \} \\ \pi u^{-1} &= \{ (v, w) \mid (vu, wu) \in \pi \} . \end{aligned}$$

Dann gilt für $u, v \in M$: $(u^{-1}\pi)v^{-1} = u^{-1}(\pi v^{-1}) =: u^{-1}\pi v^{-1}$.

Lemma 3:

Ist $\pi \in \mathcal{E}(M)$ erkennbar und $u \in M$, so sind auch $u^{-1}\pi$ und πu^{-1} erkennbare Äquivalenzrelationen.

Beweis:

$u^{-1}\pi$ und πu^{-1} sind offenbar Äquivalenzrelationen. Da π erkennbar ist, ist $\underline{\pi} \in \mathcal{C}_{\text{fin}}(M)$

$$\begin{aligned} \pi &= \{ (a, b) \in M \times M \mid \forall u, v \in M (uav, ubv) \in \pi \} = \\ &= \{ (a, b) \in M \times M \mid \forall u, v \in M (a, b) \in u^{-1}\pi v^{-1} \} = \\ &= \bigcap_{u, v \in M} u^{-1}\pi v^{-1} . \end{aligned}$$

Daher folgt

$$\underline{\pi} \subseteq u^{-1}\pi, \text{ also auch } \underline{\pi} \subseteq \underline{u^{-1}\pi}.$$

Also hat $\underline{u^{-1}\pi}$ ebenfalls endlichen Index und daher ist $u^{-1}\pi$ erkennbar.

Ebenso ist πu^{-1} erkennbar.

///

Lemma 4:

Es sei $\pi \in \mathcal{E}(M)$ erkennbar, N ein Monoid und $f : N \longrightarrow M$ ein Homomorphismus. Dann ist $f \circ \pi \circ f^{-1}$ eine erkennbare Äquivalenzrelation auf N .

("o" bezeichne das Relationenprodukt).

Beweis:

Es sei $g = \text{nat } \underline{\pi}$

$$N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M / \underline{\pi}.$$

Da π erkennbar ist, ist $\ker(f \circ g) \in \mathcal{C}_{\text{fin}}(N)$

$$\ker(f \circ g) = f \circ \underline{\pi} \circ f^{-1} \subseteq f \circ \pi \circ f^{-1}$$

also ist $\ker(f \circ g) \subseteq \underline{f \circ \pi \circ f^{-1}}$ und somit $f \circ \pi \circ f^{-1}$ erkennbar.

///

Lemma 5:

Es sei M ein endlich erzeugtes Monoid.

Ist $\rho \in \mathcal{C}_{\text{fin}}(M)$, so ist $\rho \in \mathcal{V}_{\text{fin}}(M)$.

Beweis:

$$\begin{aligned} \rho &= \{ (u, v) \mid \forall f \in \text{End}(M) (f(u), f(v)) \in \rho \} \\ &= \bigcup_{f \in \text{End}(M)} f \circ \rho \circ f^{-1} \end{aligned}$$

Aus Lemma 4 folgt:

$$f \circ \rho \circ f^{-1} \in \mathcal{C}_{\text{fin}}(M)$$

M' sei ein endliches Erzeugendensystem für M . Jedes $f \in \text{End}(M)$ ist dann definiert durch seine Einschränkung $f : M' \longrightarrow M$. Daher gibt es nur endlich viele verschiedene Homomorphismen

$$M \xrightarrow{f} M \xrightarrow{\text{nat } \rho} M/\rho$$

und somit auch nur endlich viele $f \circ \rho \circ f^{-1}$.

Daher ist $\rho \in \mathcal{V}_{\text{fin}}(M)$.

///

Korollar 6:

Es sei Σ ein endliches Alphabet, $\pi \in \mathcal{E}(\Sigma^*)$. Dann sind äquivalent:

(1) π ist erkennbar

(2) π ist endlich.

///

Korollar 7:

Es sei R ein Erzeugendensystem für $\rho \in \mathcal{C}(\Sigma^*)$.

$\rho \in \mathcal{V}(\Sigma^*)$ gdw. für jedes $g : \Sigma \longrightarrow \Sigma^*/\rho$ gilt:

$$(a,b) \in R \implies g(a) = g(b) .$$

Beweis:

Wir nehmen o.B.d.A. an, daß R reflexiv und symmetrisch ist.

Es sei $\rho \in \mathcal{V}(\Sigma^*)$, das heißt

$$\forall f \in \text{End } \Sigma^* \quad (a,b) \in R \implies (f(a), f(b)) \in \bar{R} = \rho .$$

Sei g beliebig $g : \Sigma \longrightarrow \Sigma^*/\rho$. g induziert eindeutig einen Homomorphismus $g : \Sigma^* \longrightarrow \Sigma^*/\rho$.

Zu g gibt es einen Endomorphismus

$$f : \Sigma^* \longrightarrow \Sigma^* ,$$

so daß

$$\begin{array}{ccc} \Sigma^* & \xrightarrow{g} & \Sigma^* / \rho \\ & \searrow f & \nearrow \text{nat } \rho \\ & \Sigma^* & \end{array}$$

kommutiert.

Also gilt: $(a,b) \in R \implies g(a) = g(b)$.

Umgekehrt sei $(a,b) \in \rho$ und $f \in \text{End } \Sigma^*$ vorgegeben.

$g = f \circ \text{nat } \rho$ ist definiert durch die Beschränkung auf Σ .

Für alle $a,b \in \Sigma^*$ gilt:

$$g(a) = g(b) \iff \{f(a), f(b)\} \in \rho$$

$$(a,b) \in \bar{R} = \rho \implies (a,b) \text{ liegt im transitiven}$$

Abschluß der Menge $\{(u,v) \mid \exists n \in \mathbb{N} \exists (u_i, v_i) \in R \ (i = 1, \dots, n),$

$$u = u_1 \dots u_n, \ v = v_1 \dots v_n\}$$

$$\implies g(a) = g(b) \implies \{f(a), f(b)\} \in \rho .$$

///

Lemma 8:

Jedes $\rho \in \mathcal{C}_{\text{fin}}(\Sigma^*)$ hat ein endliches Erzeugendensystem.

Beweis:

Es sei $M = \Sigma^*/_{\rho}$, $(u,v) \mapsto m(u,v)$ die Multiplikationstafel von M und

$$R := \{ \{uv, m(u,v)\} \mid u, v \in M \setminus \{1\} \} .$$

Da M endlich ist, ist $(M \setminus \{1\}; R)$ eine endliche Präsentation für M .

Für jedes $u \in M$ ist die Menge

$$s(u) := \{w \in \Sigma^* \mid |w| \text{ ist minimal und } [w]_{\rho} = u\}$$

nichtleer, denn da M von Σ erzeugt wird, gibt es ein $w \in \Sigma^*$ mit $[w]_{\rho} = u$.

Dieses w habe Länge k .

Nun ist $s(u) \subseteq \Sigma^k$, also endlich.

$(\Sigma \cup M \setminus \{1\} ; \rho \cup R \cup \{(w,u) \mid w \in s(u), u \in M\})$ ist wieder eine endliche Präsentation für M .

Wir können annehmen $M \cap \Sigma^* = \emptyset$.

Nun wenden wir Tietze-Transformationen an:

Für jedes $w \in s(u)$ entferne die Relation (w,u) und ersetze jedes Vorkommen von u innerhalb von R durch w .

Dann entferne u aus $\Sigma \cup M \setminus \{1\}$. Dadurch erhalten wir

eine Präsentation $(\Sigma ; \rho \cup R')$ für M . Offenbar ist

$R' \subseteq \rho$, also auch $\bar{R}' \subseteq \rho$. Es gilt auch $\rho \subseteq \bar{R}'$:

Sei nämlich $(a,b) \in \rho$, das heißt a und b definieren das gleiche $v \in M$.

Also liegen (a,v) und (b,v) in der von

$R \cup \{(w,u) \mid w \in s(u), u \in M\}$ erzeugten Kongruenzrelation

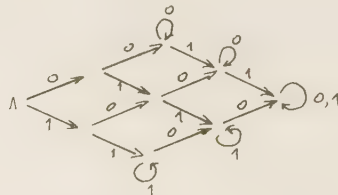
auf $(\Sigma \cup M \setminus \{1\})^*$, also $(a,b) \in \bar{R}'$.

(Σ, R') ist daher eine endliche Präsentation für Σ^*/ρ ,

also ist ρ endlich erzeugt. ///

Damit besitzen wir eine Methode, um von jeder vorgegebenen endlichen Kongruenzrelation (sogar von jeder endlich erzeugten Kongruenzrelation mit entscheidbarem Wortproblem) zu entscheiden, ob sie vollinvariant ist:

Zum Beispiel sei $\Sigma = \{0,1\}$ und $M = \Sigma^*/\rho$ gegeben durch



ρ hat das Erzeugendensystem

$$R' = \{ (01,10), (000,00), (0010,001), (001,010), (001,100), \\ (111,11), (1101,110), (110,011), (0011,0101), (0011,0110), \\ (0011,1001), (0011,1010), (0011,1100), (00110,0011), \\ (00111,0011) \}$$

Dieses läßt sich vereinfachen zu

$$R'' = \{ (01,10), (000,00), (111,11) \},$$

denn alle anderen Relationen lassen sich aus diesen ableiten.

Nun ist nach Korollar 6 zu prüfen, ob für jedes Paar $(a,b) \in R''$ und für jede Abbildung $g : \Sigma \longrightarrow \Sigma^*/\rho$ gilt:
 $g(a) = g(b)$.

In diesem Fall ist das einfach, denn zwei verschiedene Wörter über Σ sind genau dann äquivalent, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

- beide besitzen gleich viele Nullen und gleich viele Einsen,
- beide besitzen keine Null und mindestens zwei Einsen,

- beide besitzen keine Eins und mindestens zwei Nullen,
- beide besitzen genau eine Eins und mindestens zwei Nullen,
- beide besitzen genau eine Null und mindestens zwei Einsen,
- beide besitzen mindestens zwei Nullen und zwei Einsen.

Jeder Endomorphismus $f : \Sigma^* \longrightarrow \Sigma^*$ produziert aus einem Paar $(u, v) \in R^n$ ein Paar $(f(u), f(v))$, das einer der obigen Bedingungen genügt, also ist ρ vollinvariant. Σ^*/ρ ist daher das freie Monoid über Σ , in dem $xy = yx$ und $x^3 = x^2$ gilt.

Für eine vorgegebene Kongruenzrelation $\rho \in \mathcal{C}_{\text{fin}}(\Sigma^*)$ zu entscheiden, ob sie vollinvariant ist oder nicht, ist also einfach. Falls sie nicht vollinvariant ist, so besteht das Problem, die zugehörige vollinvariante Kongruenzrelation ρ zu finden.

Wir wissen:

$$\rho = \bigcup_{f \in \text{End} \Sigma^*} f \circ \rho \circ f^{-1}$$

ρ lässt sich ausdrücken

$$\rho = \bigcup_{A \in \Sigma^*/\rho} \pi_A$$

Also ist

$$\begin{aligned} \rho &= \bigcup_{f \in \text{End} \Sigma^*} f \circ \left(\bigcup_{A \in \Sigma^*/\rho} \pi_A \right) \circ f^{-1} = \\ &= \bigcup_{f \in \text{End} \Sigma^*} \bigcup_{A \in \Sigma^*/\rho} f \circ \pi_A \circ f^{-1} = \\ &= \bigcup_{f \in \text{End} \Sigma^*} \bigcup_{A \in \Sigma^*/\rho} \pi_{f^{-1}(A)} \end{aligned}$$

Es sei zum Beispiel $\rho \in \mathcal{C}(\Sigma^*)$ gegeben durch das Monoid Σ^*/ρ :



Nun sind alle $\pi_{f^{-1}(A)}$ mit $f : \Sigma \longrightarrow \Sigma^*/\rho$ und $A \in \Sigma^*/\rho$ zu bilden. Dies sind 7³ Äquivalenzrelationen vom Index höchstens zwei. Wegen $\rho \subseteq \rho$, sind nur solche $\pi_{f^{-1}(A)}$ interessant, die eine echte Verfeinerung von ρ herbeiführen:

$$f : 0 \mapsto 0 \quad A = [000]_{\rho} \quad B = [0]_{\rho} \quad C = [1]_{\rho}$$

$$1 \mapsto \Lambda$$

$$g : 0 \mapsto \Lambda$$

$$1 \mapsto 1$$

$$\pi_f^{-1}(A) = \{\Sigma^*0\Sigma^*0\Sigma^*0\Sigma^*, \Sigma^*\setminus\Sigma^*0\Sigma^*0\Sigma^*\}$$

$$\pi_f^{-1}(\Lambda) = \{1^*, \Sigma^*\setminus 1^*\}$$

$$\pi_f^{-1}(B) = \{1^*01^*, \Sigma^*\setminus 1^*01^*\}$$

$$\pi_g^{-1}(A) = \{\Sigma^*1\Sigma^*1\Sigma^*1\Sigma^*, \Sigma^*\setminus\Sigma^*1\Sigma^*1\Sigma^*\}$$

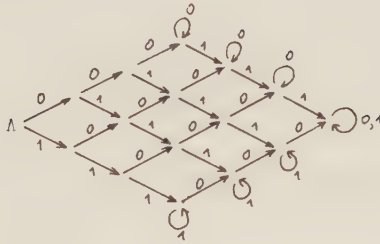
$$\pi_g^{-1}(\Lambda) = \{0^*, \Sigma^*\setminus 0^*\}$$

$$\pi_g^{-1}(C) = \{0^*10^*, \Sigma^*\setminus 0^*10^*\}$$

Nun verifiziert man leicht, daß der Durchschnitt

$$\rho' = \rho \cap \bigcap_{\substack{h=f, g \\ X=\Lambda, A, B, C}} \pi_h^{-1}(X)$$

dargestellt wird durch



Zum Beispiel ist $(011,0010) \notin \pi_{f^{-1}(B)}^{-1}$.

Ähnlich wie beim obigen Beispiel gilt nun:

ρ' ist vollinvariant, nämlich die von $xy = yx$ und $x^4 = x^3$ auf Σ^* erzeugte vollinvariante Kongruenzrelation. Wegen $\rho \subseteq \rho'$ folgt $\rho = \rho'$. Übrigens sind

weder $\rho_1 = \rho \cap \bigcup_{X \in \Sigma^*/\rho} \pi_{f^{-1}(X)}^{-1}$ noch $\rho = \rho \cap \bigcup_{X \in \Sigma^*/\rho} \pi_{g^{-1}(X)}^{-1}$

vollinvariant:

zum Beispiel ist $(00011,000111) \in \rho_1$, aber für

$$h : 0 \mapsto 1$$

$$1 \mapsto 0$$

ist $(h(00011), h(000111)) = (11100, 111000) \notin \pi_{f^{-1}(A)}^{-1}$,

also auch $\notin \rho_1$.

Analog ist $(11100, 111000) \in \rho_2$, aber

$$(h(11100), h(111000)) \notin \rho_2.$$

Man beachte, daß sich alle Definitionen und Aussagen dieses Paragraphen mühelos auf den Fall von Halbgruppen und ihre Kongruenzen übertragen mit Hilfe der folgenden Einbettung des Verbands $\mathcal{E}(\Sigma^+)$ in den Verband $\mathcal{E}(\Sigma^*)$:

$$\begin{aligned} \phi : \mathcal{E}(\Sigma^+) &\longrightarrow \mathcal{E}(\Sigma^*) \\ \rho &\longmapsto \rho^1 := \rho \cup \{\Lambda, \Lambda\} \end{aligned}$$

und die Definition: für $\pi \in \mathcal{E}(\Sigma^+)$ sei

$$\underline{\pi} := \phi^{-1}(\phi(\pi)) = \pi^1 \setminus \{\Lambda, \Lambda\}.$$

ϕ ist sogar eine Bijektion zwischen $\mathcal{E}(\Sigma^+)$ und $\{\rho \in \mathcal{E}(\Sigma^*) \mid \Sigma^*/\rho \text{ besitzt ein adjungiertes Einselement}\}$. ϕ bettet allerdings nicht $\mathcal{U}(\Sigma^+)$ in $\mathcal{V}(\Sigma^*)$ ein! Betrachten wir etwa die von $x^2 = y^2$ erzeugte vollinvariante Kongruenzrelation ρ auf Σ^+ für $\Sigma = \{0, 1\}$, so besteht die ρ^1 -Klasse von Λ aus Λ allein. $\rho^1 = \phi(\rho)$ ist aber nicht vollinvariant über Σ^* , denn $(00, \Lambda\Lambda) = (00, \Lambda) \notin \rho^1$.

§ 2

Varietäten

In § 1 haben wir gesehen, daß für die Menge $\mathbb{F}_\Sigma$ aller erkennbaren Äquivalenzrelationen auf Σ^* gilt:

$$(a) \quad \pi \in \mathbb{F}_\Sigma, \sigma \in \mathcal{C}(\Sigma^*) \quad \sigma \supseteq \pi \implies \sigma \in \mathbb{F}_\Sigma$$

$$(b) \quad \sigma, \pi \in \mathbb{F} \implies \sigma \cap \pi \in \mathbb{F}_\Sigma$$

$$(c) \quad u \in \Sigma^*, \pi \in \mathbb{F}_\Sigma \implies u^{-1}\pi, \pi u^{-1} \in \mathbb{F}_\Sigma$$

Für zwei Alphabete Σ und Γ sind $\mathbb{F}_\Gamma$ und $\mathbb{F}_\Sigma$ verknüpft durch die Aussage:

$$(d) \quad \text{Für jeden Homomorphismus } f : \Gamma^* \longrightarrow \Sigma^* \text{ gilt:}$$

$$\pi \in \mathbb{F}_\Sigma \implies f \circ \pi \circ f^{-1} \in \mathbb{F}_\Gamma.$$

Daher definieren wir:

Definition 1:

Es sei Σ ein endliches Alphabet, $\mathbb{F}_{\Sigma} \in \mathcal{C}(\Sigma^*)$, $\mathbb{F}_{\Sigma} \neq \emptyset$.

- (i) $\mathbb{F}_{\Sigma}$ heißt ein *Filter*, wenn (a) und (b) gelten.
- (ii) $\mathbb{F}_{\Sigma}$ heißt *erkennbar*, wenn $\pi \in \mathcal{C}_{\text{fin}}(\Sigma^*)$ für jedes $\pi \in \mathbb{F}_{\Sigma}$.
- (iii) Eine Familie $\mathbb{F} = \{\mathbb{F}_{\Sigma} \mid \Sigma \text{ endliches Alphabet}\}$ von erkennbaren Filtern heißt eine *E-Varietät*, falls (c) und (d) gelten.

Definition 2:

Eine Familie von nichtleeren endlichen Halbgruppen heiße *S-Varietät* (*M-Varietät*, *G-Varietät*), falls sie abgeschlossen ist unter Bildung von

- (a) Unterhalbgruppen (Untermonoiden, Untergruppen),
- (b) Quotienten,
- (c) endlichen direkten Produkten.

Man beachte, daß in (c) auch leere Produkte zugelassen sind. Daher ist $\{1\} = \Pi \emptyset$ in jeder S-Varietät (M-Varietät, G-Varietät) enthalten. Ebenso kommt $\emptyset$ in keiner S-Varietät als Halbgruppe vor. Diese beiden Vereinbarungen erweisen sich im folgenden als praktisch. Wir bezeichnen mit $\underline{S}(\underline{M}, \underline{G})$ die Familie aller endlichen Halbgruppen (Monoide, Gruppen). Sie ist die größte S-(M-, G-)-Varietät.

Satz 3:

Es sei eine Folge von Gleichungen $g_1, g_2, \dots$ gegeben.

- (i) Die Familie aller endlichen Monoide (Halbgruppen), in denen alle Gleichungen $g_1, g_2, \dots$ gelten, ist eine M-(S-)-Varietät.
- (ii) Die Familie $\underline{M}_k$ aller endlichen Monoide (Halbgruppen) in denen höchstens die ersten k Gleichungen verletzt sind, ist eine M-(S-)-Varietät.
- (iii) Die Familie $\underline{H} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \underline{M}_k$ ist eine M-(S-)-Varietät.

Beweis:

[4] Seite 113.

///

Die unter (i) beschriebene $M-(S-)$ -Varietät heißt dann durch die Gleichungen $g_1, g_2, \dots$ definiert, während die unter (iii) beschriebene $M-(S-)$ -Varietät durch die Gleichungen $g_1, g_2, \dots$ schließlich definiert heißt.

Satz 4:

Es sei $\underline{H}$ eine $M-(S-)$ -Varietät.

Dann gibt es eine Folge von Gleichungen, die $\underline{H}$ schließlich definiert.

Beweis:

[4] Seite 113.

///

Lemma 5:

Für jede E-Varietät $\mathbb{F}$ sind äquivalent:

$$(i) \quad \pi \in \mathbb{F}$$

$$(ii) \quad \underline{\pi} \in \mathbb{F}$$

$$(iii) \quad \overline{\pi} \in \mathbb{F}$$

Beweis:

Sei $\pi \in \mathbb{F}_{\Sigma}$. Dann ist

$$\underline{\pi} = \bigcup_{u,v \in \Sigma^*} u^{-1} \pi v^{-1} = \bigcup_{x,y \in \Sigma} x^{-1} \pi y^{-1}$$

denn:

$$(a,b) \in \bigcup_{x,y \in \Sigma} x^{-1} \pi y^{-1}$$

heißt:

$$\forall x,y \in \Sigma \quad (xay, xby) \in \pi.$$

Also folgt

$$\forall u,v \quad (uav, ubv) \in \pi,$$

das heißt,

$$(a,b) \in \bigcup_{u,v \in \Sigma^*} u^{-1} \pi v^{-1} .$$

Die umgekehrte Inklusion ist offensichtlich, da $\Sigma \subseteq \Sigma^*$.

Die $x^{-1} \pi y^{-1}$ liegen in $\mathbb{F}_\Sigma$ nach Voraussetzung, also ist $\pi \in \mathbb{F}_\Sigma$.

Wie in Lemma 1.5 folgt:

$$\pi = \bigcap_{f \in \text{End} \Sigma^*} f \circ \pi \circ f^{-1}$$

ist ein endlicher Durchschnitt. Da die $f \circ \pi \circ f^{-1}$ in $\mathbb{F}_\Sigma$ liegen, gehört auch π zu $\mathbb{F}_\Sigma$.

(iii) $\implies$ (i) ist trivial.

///

Definition 6:

(a) Für eine Klasse $\underline{K}$ von Monoiden und ein endliches Alphabet Σ sei

$$\Sigma^*(\underline{K}) = \{ \pi \in \mathcal{C}(\Sigma^*) \mid \Sigma^* / \pi \in \underline{K} \}$$

(b) Für jedes endliche Alphabet Σ sei eine Teilmenge $G_\Sigma \subseteq \mathcal{C}(\Sigma^*)$ gegeben. Dem System $G = \{G_\Sigma \mid \Sigma \text{ endlich}\}$ ordnen wir zu

$$M(G) = \bigcup_{\Sigma \text{ endlich}} \{ \Sigma^* / \pi \mid \pi \in G_\Sigma \}$$

Theorem 7:

Die Abbildungen

$$\underline{V} \longmapsto F(\underline{V}) = \{ \Sigma^*(\underline{V}) \mid \Sigma \text{ endlich} \}$$

$$\text{und} \quad \mathbb{F} \longmapsto M(\mathbb{F})$$

sind zueinander inverse Bijektion zwischen der Klasse der M-Varietäten und der Klasse aller E-Varietäten.

Beweis:

1. Zunächst zeigen wir:

$F(\underline{V})$ ist E-Varietät.

(α) Es sei $\pi \in \Sigma^*(\underline{V})$, $\sigma \in \mathcal{Z}(\Sigma^*)$ mit $\sigma \supseteq \pi$.

Dann ist $\underline{\sigma} \supseteq \underline{\pi}$, also $\Sigma^*/_{\underline{\pi}} \longrightarrow \Sigma^*/_{\underline{\sigma}}$.

Wegen $\Sigma^*/_{\underline{\pi}} \in \underline{V}$ ist auch $\Sigma^*/_{\underline{\sigma}} \in \underline{V}$, also $\sigma \in \Sigma^*(\underline{V})$.

(β) Es seien $\pi, \sigma \in \Sigma^*(\underline{V})$. Dann ist $\underline{\pi} \cap \underline{\sigma} = \underline{\pi \cap \sigma}$,

also ist $\Sigma^*/_{\underline{\pi \cap \sigma}}$ subdirektes Produkt von $\Sigma^*/_{\underline{\pi}}$

und $\Sigma^*/_{\underline{\sigma}}$, also in $\underline{V}$. Daher liegt $\pi \cap \sigma$ in $\Sigma^*(\underline{V})$.

$\Sigma^*(\underline{V})$ ist erkennbar, da $\underline{V}$ nur endliche Monoide enthält.

(γ) Für jedes $w \in \Sigma^*$ ist

$$\underline{\pi} = \bigcap_{u, v \in \Sigma} u^{-1} \pi v^{-1} \subseteq w^{-1} \pi$$

und $\underline{\pi} \subseteq \pi w^{-1}$.

Daher ist $\underline{\pi} \subseteq \underline{w^{-1} \pi}$ und wie in (α) folgt $w^{-1} \pi \in \Sigma^*(\underline{V})$ und $\pi w^{-1} \in \Sigma^*(\underline{V})$.

(δ) Es sei $f : \Gamma^* \longrightarrow \Sigma^*$ ein Homomorphismus und $\pi \in \Sigma^*(\underline{V})$.

Es gilt $f \circ \underline{\pi} \circ f^{-1} \subseteq \underline{f \circ \pi \circ f^{-1}}$ (siehe Lemma 1.4)

Bezeichne $\rho = f \circ \underline{\pi} \circ f^{-1}$.

f induziert einen Homomorphismus

$$\Gamma^*/_{\rho} \longrightarrow \Sigma^*/_{\underline{\pi}}$$

mittels $[u]_{\rho} \longmapsto [f(u)]_{\underline{\pi}}$

Dieser ist injektiv, denn $(f(u), f(v)) \in \underline{\pi} \iff (u, v) \in \rho$.

$\Gamma^*/_{\rho}$ ist also Untermonoid von $\Sigma^*/_{\underline{\pi}}$, also $\Gamma^*/_{\rho} \in \underline{V}$
und es folgt $f \circ \pi \circ f^{-1} \in \Gamma^*(\underline{V})$.

2. Sei nun $\mathbb{F}$ eine E-Varietät und $M \in M(\mathbb{F})$, das heißt

$$M = \Sigma^*/_{\underline{\pi}} \text{ mit } \pi \in \mathbb{F}_{\Sigma}.$$

Sei N ein homomorphes Bild von M , das heißt, $N = \Sigma^*/_{\sigma}$
mit $\sigma \in \mathcal{C}(\Sigma^*)$, $\sigma \supseteq \underline{\pi}$. Da mit π auch $\underline{\pi}$ zu $\mathbb{F}_{\Sigma}$ gehört,
ist auch $\sigma \in \mathbb{F}_{\Sigma}$ und $\Sigma^*/_{\sigma} = N \in M(\mathbb{F})$.

Sei $\phi : N \longrightarrow M$. Da M endlich ist, ist N endlich
erzeugt, also $N = \Gamma^*/_{\sigma}$ mit $\sigma \in \mathcal{C}(\Gamma^*)$. Wir definieren
einen Homomorphismus $\psi : \Gamma^* \longrightarrow \Sigma^*$ durch:

Für $x \in \Gamma$ sei $\psi(x) = w$ für irgendein $w \in \phi([x]_{\sigma})$.

Nun gilt:

$$\sigma = \psi \circ \underline{\pi} \circ \psi^{-1}.$$

Ist nämlich $(v, v') \in \sigma$, so ist $(\psi(v), \psi(v')) \in \underline{\pi}$.

Ist umgekehrt $(\psi(v), \psi(v')) \in \underline{\pi}$, so ist wegen der In-
jektivität von ϕ auch $(v, v') \in \sigma$.

Wegen $\pi \in \mathbb{F}$ ist auch $\sigma \in \mathbb{F}$, also

$$N = \Sigma^* /_{\sigma} \in M(\mathbb{F}) .$$

Schließlich sei $N = M_1 \times M_2$ mit $M_1, M_2 \in M(\mathbb{F})$, das heißt

$$M_1 \cong \Sigma^* /_{\pi} , M_2 \cong \Gamma^* /_{\rho} \text{ mit } \pi, \rho \in \mathbb{F}$$

und o.B.d.A.

$$\Gamma \cap \Sigma = \emptyset .$$

Das Alphabet $\Gamma \cup \Sigma$ ist endlich.

ϕ bezeichne den natürlichen Homomorphismus

$$\phi : (\Gamma \cup \Sigma)^* \longrightarrow \Gamma^* /_{\rho} \times \Sigma^* /_{\pi} .$$

ψ_1 und ψ_2 seien die Projektionen auf $\Gamma^* /_{\rho}$ und $\Sigma^* /_{\pi}$.
Dann sind

$$\ker \phi \circ \psi_1 = \phi \circ \psi_1 \circ \rho \circ \psi_1^{-1} \circ \phi^{-1}$$

und

$$\ker \phi \circ \psi_2 = \phi \circ \psi_2 \circ \pi \circ \psi_2^{-1} \circ \phi^{-1} \text{ in } \mathbb{F}_{\Gamma \cup \Sigma}$$

also auch

$$\tau := \phi \circ \psi_1 \circ \rho \circ \psi_1^{-1} \circ \phi^{-1} \cap \phi \circ \psi_2 \circ \pi \circ \psi_2^{-1} \circ \phi^{-1} \in \mathbb{F}_{\Gamma \cup \Sigma}.$$

Die Abbildung

$$[w]_{\tau} \longmapsto ([w_{\Gamma}]_{\underline{\rho}}, [w_{\Sigma}]_{\underline{\pi}}),$$

wobei w_{Γ} die Folge der Buchstaben von w ist, die zu Γ gehören, ist eine Isomorphie

$$f : (\Gamma \cup \Sigma)^* /_{\tau} \longrightarrow \Gamma^* /_{\underline{\rho}} \times \Sigma^* /_{\underline{\pi}}.$$

Da $\tau \in \mathbb{F}_{\Gamma \cup \Sigma}$, ist $(\Gamma \cup \Sigma)^* /_{\tau} \in M(\mathbb{F})$, also

$$\Gamma^* /_{\underline{\rho}} \times \Sigma^* /_{\underline{\pi}} = M_1 \times M_2 \in M(\mathbb{F}).$$

$M(\mathbb{F})$ ist daher eine M-Varietät.

Schließlich ist

$$\begin{aligned} M(F(\underline{V})) &= \bigcup_{\Sigma \text{ endlich}} \{ \Sigma^* / \underline{\pi} \mid \pi \in \Sigma^*(\underline{V}) \} = \\ &= \underline{V} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} (F(M(\mathbb{F})))_{\Sigma} &= \{ \pi \in \mathcal{Z}(\Sigma^*) \mid \Sigma^* / \underline{\pi} \in M(\mathbb{F}) \} = \\ &= \{ \pi \mid \Sigma^* / \underline{\pi} \in \bigcup_{\Gamma \text{ endlich}} \{ \Gamma^* / \underline{\tau} \mid \tau \in \mathbb{F}_{\Gamma} \} \} \\ &\cong \mathbb{F}_{\Sigma} . \end{aligned}$$

Es gilt auch die umgekehrte Inklusion:

Sei $\pi \in \mathcal{Z}(\Sigma^*)$ mit $\pi \notin \mathbb{F}_{\Sigma}$, also auch $\underline{\pi} \notin \mathbb{F}_{\Sigma}$,
das heißt

$$\Sigma^* / \underline{\pi} \notin M(\mathbb{F}_{\Sigma}) .$$

Wäre für ein anderes Alphabet

$$\Sigma^* / \underline{\pi} \cong \Gamma^* / \underline{\rho} \in M(\mathbb{F}_{\Gamma}) ,$$

so wäre

$$\begin{array}{ccc}
 \Sigma^* & \xrightarrow{f} & \Gamma^* \\
 \text{nat } \underline{\pi} \downarrow & & \downarrow \text{nat } \underline{\rho} \\
 \Sigma^* / \underline{\pi} & \cong & \Gamma^* / \underline{\rho}
 \end{array}$$

kommutativ mit Hilfe des durch

$$x \mapsto w \in g([x]_{\underline{\pi}}) \quad (x \in \Sigma)$$

definierten Homomorphismus f .

Nun gilt aber

$$\begin{aligned}
 \underline{\pi} &= \ker (\text{nat } \underline{\pi}) = \ker (f \circ \text{nat } \underline{\rho} \circ g^{-1}) = \\
 &= f \circ \text{nat } \underline{\rho} \circ g^{-1} \circ g \circ (\text{nat } \underline{\rho})^{-1} \circ f^{-1} = \\
 &= f \circ \underline{\rho} \circ f^{-1} .
 \end{aligned}$$

Also wäre $\underline{\pi} \in \mathbb{F}_{\Sigma}$.

Daher gilt

$$\Sigma^* / \pi \notin M(\mathbb{F}) ,$$

$$\text{also} \quad \pi \notin (F(M(\mathbb{F})))_{\Sigma} . \quad ///$$

Bemerkung 8:

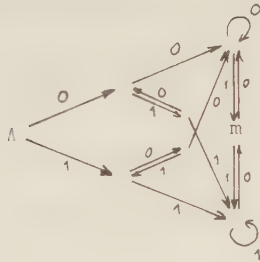
Zu jeder E-Varietät $\mathbb{F}$ kann man eine Klasse $\mathcal{F}$ von rationalen Sprachen definieren durch:

$$L \in \Sigma^* \quad L \in \mathcal{F} \iff \pi_L \in \mathbb{F} .$$

$\mathcal{F}$ ist dann eine *-Varietät im Sinne von Eilenberg [4].

$\mathbb{F}$ hat gegenüber $\mathcal{F}$ den Vorteil, daß $M(\mathbb{F})$ bereits eine M-Varietät ist, während dies für die Menge der syntaktischen Monoide der zu $\mathcal{F}$ gehörenden Sprachen im allgemeinen nicht zutrifft, wie das folgende Beispiel aus [7] zeigt:

Für $\Sigma = \{0,1\}$ hat die Sprache $L = \Sigma^*11(01)^*$ das syntaktische Monoid Σ^*/π_L :



mit der Tafel

	λ	0	1	01	10	00	11	m
λ	λ	0	1	01	10	00	11	m
0	0	00	01	m	0	00	11	m
1	1	10	11	1	m	00	11	m
01	01	0	11	01	m	00	11	m
10	10	00	1	m	10	00	11	m
00	00	00	m	m	00	00	11	m
11	11	m	11	11	m	00	11	m
m	m	00	11	m	m	00	11	m

die Menge $\{\lambda, 00, 11, m\}$ bildet ein Untermonoid von Rechtseinheiten, welches nach [7], Seite 47, Exercise 7, kein syntaktisches Monoid der Form Γ^*/π_M für ein geeignetes $M \subseteq \Gamma^*$ sein kann.

Beispiele:

Zur M-Varietät aller Monoide gehört nach Definition die E-Varietät $\{\mathcal{E}_{\text{rat}}(\Sigma^*) \mid \Sigma \text{ endlich}\}$, wobei $\mathcal{E}_{\text{rat}}(\Sigma^*)$ die Menge der erkennbaren (= rationalen) Äquivalenzrelationen auf Σ^* bezeichnet.

Die §§ 4 und 6 bringen weitere Beispiele.

Bemerkung 9:

Jede E-Varietät $\mathbb{F}$ ist charakterisierbar durch ein System $(\pi_{k,\Sigma})_{k,\Sigma}$ absteigender Folgen in $\mathcal{E}_{\text{fin}}(\Sigma^*)$, wo Σ alle endlichen Alphabete durchläuft mit Hilfe der folgenden Konstruktion:

$$\pi_{0,\Sigma} := \pi_{\Sigma^*}$$

und für $k > 0$ sei

$$E_{k,\Sigma} = \mathbb{F}_{\Sigma} \cap \mathcal{E}_k(\Sigma^*) \quad , \quad \pi_{k,\Sigma} = \pi_{k-1,\Sigma} \cap \bigcap_{\pi \in E_{k,\Sigma}} \pi \quad .$$

Die Folge $(\pi_{k,\Sigma})_{k \geq 0}$ in $\mathcal{E}_{\text{fin}}(\Sigma^*)$ ist absteigend, denn alle Durchschnitte sind endlich und es gilt:

$$\pi \in E_{k+1} \implies \exists \pi' \in E_k \quad \pi \subseteq \pi' \quad .$$

Wegen Lemma 2.5 kann man auch innerhalb $\mathcal{C}(\Sigma^*)$ oder $\mathcal{V}(\Sigma^*)$ eine $\mathbb{F}$ charakterisierende absteigende Folge $(\rho_k)_{k \geq 0}$ finden. Es gilt dann für $\pi \in \mathcal{C}(\Sigma^*)$

$$\pi \in \mathbb{F}_{\Sigma} \iff \exists k \in \mathbb{N} \quad \pi \supseteq \rho_k.$$

Umgekehrt gilt das

Lemma 10:

Für jedes endliche Alphabet Σ sei eine absteigende Folge $\rho_{1,\Sigma} \supseteq \rho_{2,\Sigma} \supseteq \dots$ in $\mathcal{C}(\Sigma^*)$ gegeben mit der Eigenschaft:

(*) für jedes $f : \Gamma^* \longrightarrow \Sigma^*$ und jedes $k \in \mathbb{N}$ gibt es ein $\ell \in \mathbb{N}$, so daß

$$f \circ \rho_{k,\Sigma} \circ f^{-1} \supseteq \rho_{\ell,\Gamma}.$$

Dann definiert das System der Folgen $((\rho_{i,\Sigma})_{i \in \mathbb{N}})_{\Sigma}$ endlich eine E-Varietät durch

$$\pi \in \mathbb{F}_{\Sigma} \iff \pi \in \mathcal{C}_{\text{fin}}(\Sigma^*) \text{ und } \exists k \in \mathbb{N} \quad \pi \supseteq \rho_{k,\Sigma}.$$

Beweis: Klar.

///

Wählt man speziell für das System der Folgen

$\{(\rho_{i,\Sigma})_{i \in \mathbb{N}}\}_{\Sigma \text{ endlich}}$ eine Folge von Gleichungen

$(u_i = v_i)_{i \in \mathbb{N}}$ und definiert für $\rho \in \mathcal{C}_{\text{fin}}(\Sigma^*)$

$\rho \in \mathbb{F}_{\Sigma} \iff$ in $\Sigma^*/_{\rho}$ gelten schließlich alle Gleichungen

$(u_i = v_i)_{i \in \mathbb{N}}$, so ist die Bedingung (*) automatisch erfüllt.

Sei nämlich $\theta_{i,\Sigma}$ die von $u_i = v_i$ auf Σ^* erzeugte vollinvariante Kongruenzrelation und $f : \Gamma^* \longrightarrow \Sigma^*$.

In $\Gamma^*/_{\theta_{i,\Gamma}}$ gilt die Gleichung $u_i = v_i$, also gilt

$$(u_i, v_i) \in \theta_{i,\Gamma} \implies (f(u_i), f(v_i)) \in \theta_{i,\Sigma},$$

das heißt $\theta_{i,\Gamma} \subseteq f \circ \theta_{i,\Sigma} \circ f^{-1}$.

Also gilt die Bedingung (*) für das System der von den Gleichungen $u_i = v_i$ auf Σ^* erzeugten vollinvarianten Kongruenzrelationen, wobei Σ alle endlichen Alphabete durchläuft, sogar mit $\ell = k$.

Alle bisher gemachten Aussagen bleiben gültig, wenn man in allen Definitionen und Aussagen folgende Substitution vornimmt:

Monoid	Halbgruppe
Monoidhomomorphismus	Halbgruppenhomomorphismus
ε^*	ε^+
M-Varietät	S-Varietät
*-Varietät	+ -Varietät

Für eine endliche Halbgruppe S bezeichne $\mathcal{H}_S, \mathcal{R}_S, \mathcal{L}_S, \mathcal{J}_S$ die GREEN'schen Relationen für S .

Definition 11:

Es sei

$$\begin{aligned}\underline{A_p} &= \{M \mid M \text{ endliches Monoid, } \mathcal{H}_M = \Delta_M\} \\ \underline{R} &= \{M \mid M \text{ endliches Monoid, } \mathcal{R}_M = \Delta_M\} \\ \underline{L} &= \{M \mid M \text{ endliches Monoid, } \mathcal{L}_M = \Delta_M\} \\ \underline{J} &= \{M \mid M \text{ endliches Monoid, } \mathcal{J}_M = \Delta_M\}\end{aligned}$$

Lemma 12:

$$\underline{J} = \underline{L} \cap \underline{R} , \underline{R} \cup \underline{L} \subseteq \underline{Ap}$$

Beweis:

$$\mathcal{H}_M = \mathcal{R}_M \cap \mathcal{L}_M \quad \text{und}$$

$$M \text{ endlich} \implies \mathcal{J}_M = \mathcal{L}_M \vee \mathcal{R}_M . \quad ///$$

Lemma 13 [4]:

Es sei M ein endliches Monoid.

$$a) \quad M \in \underline{Ap} \iff \exists k \in \mathbb{N} \quad x^{k+1} = x^k \text{ gilt in } M$$

$$b) \quad M \in \underline{R} \iff \exists k \in \mathbb{N} \quad (xy)^k x = (xy)^k \text{ gilt in } M$$

$$c) \quad M \in \underline{L} \iff \exists k \in \mathbb{N} \quad x(yx)^k = (yx)^k \text{ gilt in } M$$

$$d) \quad M \in \underline{J} \iff \exists k \in \mathbb{N} \quad (xy)^k x = y(xy)^k \text{ gilt in } M .$$

Beweis:

$$a) \quad " \iff ": \text{ Seien } a, b \in M \text{ mit } (a, b) \in \mathcal{H}_M .$$

Dann ist $b = va$ und $a = bx$ für geeignete $v, x \in M$.

$$\implies a = v a x = v^{k+1} a x^{k+1} = v^{k+1} a x^k = v^k b x^k = v^k a x^{k-1} = \dots = b .$$

" $\implies$ " : M ist endlich, also gibt es für jedes $m \in M$

$$k_m, n_m \in \mathbb{N} \text{ mit}$$

$$m^{k_m+n_m} = m^{k_m} .$$

Da M endlich ist, gibt es auch ein universelles $k \in \mathbb{N}$ mit

$$m^{k+n_m} = m^k .$$

Da $(m^{k+1}, m^k) \in \mathcal{H}_M$ für alle $j = 0, 1, \dots, n_m$ und $\mathcal{H}_m = \Delta_M$ folgt

$$m^{k+1} = m^k \text{ für jedes } m \in M ,$$

also gilt in M

$$x^{k+1} = x^k .$$

b) In M gelte $(xy)^k x = (xy)^k$.

Für $(a, b) \in \mathcal{R}_M$ gibt es $u, v \in M$ mit

$$a = bu, b = av .$$

Dann ist

$$a = a v u = a(vu)^k = a(vu)^k v = av = b .$$

Umgekehrt sei $M \in \underline{R}$.

Zu $a, b \in M$ gibt es $k, n \in \mathbb{N}$ mit

$$\begin{aligned} (ab)^{k+n} &= (ab)^k \\ (ab)^{k+n} &= (ab)^k a \cdot b(ab)^{n-1}, \text{ also} \\ ((ab)^k a, (ab)^k) &\in \mathcal{R}_M. \end{aligned}$$

Da $M \in \underline{R}$, gilt

$$(ab)^k a = (ab)^k.$$

M ist endlich, also gibt es ein universelles k mit

$$(xy)^k x = (xy)^k \text{ gilt in } M.$$

c) Analog zu b).

d) Folgt aus b), c) und $\underline{J} = \underline{L} \cap \underline{R}$.

///

Folgerung:

$\underline{Ap}$, $\underline{R}$, $\underline{L}$, $\underline{J}$ sind M -Varietäten, denn $\underline{Ap}$, $\underline{R}$, $\underline{L}$, $\underline{J}$ sind schließlich gleichungsdefiniert.

Lemma 14:

Für jedes endliche Monoid M sind äquivalent:

- (i) $M \in \underline{Ap}$
- (ii) Ist eine Unterhalbgruppe G von M eine Gruppe, so ist sie trivial.

Beweis:

(i) $\implies$ (ii): Es sei G eine beliebige Gruppe in M mit Einselement e , $g \in G$. $(g, e) \in \mathcal{H}_M$, also wegen $M \in \underline{Ap}$: $g = e$.

(ii) $\implies$ (i): Wie im Beweis von Lemma 13 (a) gibt es ein $k \in \mathbb{N}$, so daß für alle $m \in M$ gilt:

$$m^{k+n_m} = m^k$$

für ein gewisses $n_m \in \mathbb{N}$.

Die Elemente $x^k, x^{k+1}, \dots, x^{k+n_m-1}$ bilden eine zyklische Gruppe. Wegen (ii) folgt $n_m = 1$, also gilt in M $x^{k+1} = x^k$. Nach Lemma 13 gehört also M zu $\underline{Ap}$.

§ 3

Konstruktion von Varietäten

Generelle Voraussetzung für diesen Paragraphen:

Alle Monoide (außer Σ^*) und alle Halbgruppen (außer Σ^+) sind endlich.

Die Klasse aller M-(S-)Varietäten bildet einen vollständigen Verband bezüglich der Inklusion. Daher kann man von erzeugten M-(S-)Varietäten reden und insbesondere endliche Suprema bilden.

Die Klasse aller E-Varietäten bildet ebenfalls einen vollständigen Verband unter der Ordnung

$$\mathbb{E} \leq \mathbb{F} \iff \forall \Sigma \quad \mathbb{F}_\Sigma \subseteq \mathbb{E}_\Sigma .$$

Lemma 1:

$$\mathbb{E} \leq \mathbb{F} \iff \forall \Sigma \quad \forall \pi \in \mathbb{E}_\Sigma \quad \exists \pi' \in \mathbb{F}_\Sigma \quad \pi' \subseteq \pi .$$

Beweis:

" $\implies$ ": Es sei $\mathbb{E}_\Sigma \subseteq \mathbb{F}_\Sigma$; dann erfüllt $\pi' = \pi$ die Aussage.

" $\impliedby$ ": Es sei $\pi \in \mathbb{E}_\Sigma$. Nach Voraussetzung gibt es ein

$\pi' \in \mathbb{F}_\Sigma$ mit $\pi' \subseteq \pi$. Da $\mathbb{F}_\Sigma$ ein Filter ist, ist

$\pi \in \mathbb{F}_\Sigma$, also $\mathbb{E}_\Sigma \subseteq \mathbb{F}_\Sigma$.

///

Korollar 2:

$\mathbb{E}$ und $\mathbb{F}$ seien E-Varietäten. Dann gilt:

$$(i) \quad (\sup(\mathbb{E}, \mathbb{F}))_{\Sigma} = \langle \{\pi \cap \pi' \mid \pi \in \mathbb{E}_{\Sigma}, \pi' \in \mathbb{F}_{\Sigma}\} \rangle,$$

$$(ii) \quad (\inf(\mathbb{E}, \mathbb{F}))_{\Sigma} = \langle \{\pi \vee \pi' \mid \pi \in \mathbb{E}_{\Sigma}, \pi' \in \mathbb{F}_{\Sigma}\} \rangle,$$

wobei $\langle U \rangle$ der von $U \subseteq \mathcal{L}(\Sigma^*)$ erzeugte Filter ist.

Beweis:

Die Menge $U_{\Sigma} := \langle \{\pi \cap \pi' \mid \pi \in \mathbb{E}_{\Sigma}, \pi' \in \mathbb{F}_{\Sigma}\} \rangle$

ist enthalten in jedem Filter auf Σ^* , der $\mathbb{E}_{\Sigma}$ und $\mathbb{F}_{\Sigma}$ umfaßt.

Ebenso enthält die Menge $U'_{\Sigma} = \langle \{\pi \vee \pi' \mid \pi \in \mathbb{E}_{\Sigma}, \pi' \in \mathbb{F}_{\Sigma}\} \rangle$ jeden Filter, der sowohl in $\mathbb{E}_{\Sigma}$, also auch in $\mathbb{F}_{\Sigma}$ enthalten ist.

Nun gilt für alle $u \in \Sigma^*$, $\pi, \pi' \in \mathcal{L}(\Sigma^*)$, $f: \Gamma^* \longrightarrow \Sigma^*$.

$$- u^{-1}(\pi \cap \pi') = u^{-1}\pi \cap u^{-1}\pi' \in U_{\Sigma}$$

$$- (\pi \cap \pi')u^{-1} = \pi u^{-1} \cap \pi' u^{-1} \in U_{\Sigma}$$

$$- f \circ (\pi \cap \pi') \circ f^{-1} = f \circ \pi \circ f^{-1} \cap f \circ \pi' \circ f^{-1} \in U_{\Gamma}$$

und

$$\begin{aligned} - u^{-1}(\pi \vee \pi') &\supseteq u^{-1}\pi \vee u^{-1}\pi' \in U_{\Sigma}' \\ - (\pi \vee \pi')u^{-1} &\supseteq \pi u^{-1} \vee \pi' u^{-1} \in U_{\Sigma}' \\ - f \circ (\pi \vee \pi') \circ f^{-1} &\supseteq f \circ \pi \circ f^{-1} \vee f \circ \pi' \circ f^{-1} \in U_{\Gamma}' \end{aligned}$$

Also ist sowohl das System der U_{Σ} , als auch das System der U_{Σ}' eine E-Varietät und daher folgt die Behauptung. ///

Bemerkung 3:

- (a) Um $\sup(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ oder $\inf(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ zu erzeugen, genügt es, Kongruenzrelationen aus $\mathbb{E}$ und $\mathbb{F}$ zu kombinieren:

$$\begin{aligned} (\sup(\mathbb{E}, \mathbb{F}))_{\Sigma} &= \langle \pi \cap \pi' \mid \pi \in \mathbb{E} \cap \mathcal{C}(\Sigma^*), \pi' \in \mathbb{F} \cap \mathcal{C}(\Sigma^*) \rangle \\ (\inf(\mathbb{E}, \mathbb{F}))_{\Sigma} &= \langle \pi \vee \pi' \mid \pi \in \mathbb{E} \cap \mathcal{C}(\Sigma^*), \pi' \in \mathbb{F} \cap \mathcal{C}(\Sigma^*) \rangle. \end{aligned}$$

Ebenso für vollinvariante Kongruenzrelationen.

- (b) Für S-Varietäten $\underline{V}$, $\underline{W}$ bezeichne $\underline{V} \vee \underline{W}$ die kleinste S-Varietät, die $\underline{V}$ und $\underline{W}$ enthält. Für jede M-Varietät $\underline{V}$ bezeichne $\underline{V}_S$ die kleinste S-Varietät, die $\underline{V}$ enthält. Offenbar gilt für je zwei M-Varietäten $\underline{V}$, $\underline{W}$:

$$\sup(\underline{V}, \underline{W}) \subseteq \underline{V}_S \vee \underline{W}_S$$

Es gilt sogar:

$$(\sup(\underline{V}, \underline{W}))_S = \underline{V}_S \vee \underline{W}_S \quad (\text{siehe [4], p. 112}).$$

Für jede M-Varietät $\underline{V}$ ist $\underline{V}_S$ die kleinste S-Varietät $\underline{A}$, für die gilt

$$\underline{A} \cap \underline{M} = \underline{V}.$$

" $\sup$ " ist klar. Sei $M \in \underline{V}_S \cap \underline{M}$, das heißt M ist homomorphes Bild einer Unterhalbgruppe V von $V_1 \times \dots \times V_n$ mit $V_i \in \underline{V}$ ($i = 1, \dots, n$). Das Monoid $V_1 \times \dots \times V_n$ habe das Einselement 1.

Dann ist $V \cup \{1\}$ ein Untermonoid von $V_1 \times \dots \times V_n$, also $V \cup \{1\} \in \underline{V}$.

V hat ebenfalls ein Einselement e. Die Abbildung $f: V \cup \{1\} \longrightarrow V$, definiert durch $f(m) = m$ ($m \neq 1$), $f(1) = e$ ist ein Homomorphismus, also ist $V \in \underline{V}$ und daher auch $M \in \underline{V}$.

Die Abbildung $\mathbb{F} \longmapsto M(\mathbb{F})$ ist nach Theorem 2.6 eine Bijektion zwischen dem Verband der E-Varietäten und dem Verband aller M-Varietäten. Da sie offensichtlich auch monoton ist, ist sie sogar eine Verbandsisomorphie. Daher gilt der

Satz 4:

Es seien $\underline{V}$ und $\underline{W}$ M-Varietäten. Ein Monoid gehört genau dann zu

- (i) $\sup(\underline{V}, \underline{W})$, wenn M homomorphes Bild eines subdirekten Produkts eines Monoids in $\underline{V}$ mit einem Monoid in $\underline{W}$ ist.
- (ii) $\inf(\underline{V}, \underline{W})$, wenn in M schließlich alle Gleichungen von $\underline{V}$ und $\underline{W}$ gelten.

Beweis:

- (i) Sei $M = \Sigma^* / \rho \in \sup(\underline{V}, \underline{W})$.

$\mathbb{E}$ und $\mathbb{F}$ seien die zu $\underline{V}$ und $\underline{W}$ gehörigen E-Varietäten.

Nach Korollar ist also

$$\rho \supseteq \pi \cap \pi' \text{ mit } \pi \in \mathbb{E}_{\Sigma}, \pi' \in \mathbb{F}_{\Sigma} .$$

Daher ist $\Sigma^* / \pi \cap \pi' \longrightarrow \Sigma^* / \pi \times \Sigma^* / \pi' ,$

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ \downarrow \\ \Sigma^* / \rho \end{array}$$

und es folgt " $\longrightarrow$ " .

Umgekehrt sei M homomorphes Bild eines subdirekten Produkts von M_1 und M_2 mit $M_1 \in \underline{V}$, $M_2 \in \underline{W}$.
 $M_1 = \Sigma^*/\gamma$, $M_2 = \Gamma^*/\delta$, $\Sigma \cap \Gamma = \emptyset$.

Sei $f : (\Sigma \cup \Gamma)^* \longrightarrow \Sigma^*$; $\tau \longmapsto \begin{cases} \tau, \tau \in \Sigma \\ \Lambda, \tau \in \Gamma \end{cases}$

$g : (\Sigma \cup \Gamma)^* \longrightarrow \Gamma^*$; $\tau \longmapsto \begin{cases} \Lambda, \tau \in \Sigma \\ \tau, \tau \in \Gamma \end{cases}$

Für $\Delta = \Sigma \cup \Gamma$ sind nun

$$\gamma' = f \circ \gamma \circ f^{-1} \in E_{\Delta}$$

$$\delta' = g \circ \delta \circ g^{-1} \in F_{\Delta}.$$

Nun läßt sich

$$\begin{array}{ccc} \Delta^*/\gamma' & \times & \Delta^*/\delta' \longrightarrow \Sigma^*/\gamma \times \Gamma^*/\delta \\ & & \uparrow \Lambda \\ & & \cdot \longrightarrow M \end{array}$$

kommutativ ergänzen zu

$$\begin{array}{ccc} \Delta^*/\gamma' & \times & \Delta^*/\delta' \longrightarrow \Sigma^*/\gamma \times \Gamma^*/\delta \\ \uparrow \Lambda & & \uparrow \Lambda \\ \cdot & \longrightarrow & \cdot \longrightarrow M \end{array}$$

M ist nun sogar homomorphes Bild eines subdirekten Produkts von $\Delta^*/_{\gamma'}$ und $\Delta^*/_{\delta'}$, das heißt

$$M \cong \Delta^*/_{\delta'} \text{ mit} \\ \rho \cong \gamma' \cap \delta'$$

Dies heißt aber $M \in \sup(\underline{V}, \underline{W})$ nach Korollar.

(ii) Trivial, da $\inf(\underline{V}, \underline{W}) = \underline{V} \cap \underline{W}$. ///

Folgerungen 5:

a) Es sei I eine beliebige Indexmenge.

$\underline{W}_i$ ($i \in I$) seien M-Varietäten, U ein Monoid.

$$U \in \sup_{i \in I} \underline{W}_i \iff \exists J \subseteq I, J \text{ endlich } U \in \sup_{i \in J} \underline{W}_i$$

b) Die M-Varietät $\sup(\underline{V}, \underline{W})$ ist erzeugt von den direkten Produkten von $\underline{V}$ -Monoiden mit $\underline{W}$ -Monoiden.

c) Satz 4 gilt für S-Varietäten und $\vee, \cap$ entsprechend.

Definition 6:

Es sei $\underline{M}$ eine M -Varietät.

Die Familie

$$L \underline{M} := \{S \mid S \text{ endliche Halbgruppe; für jedes Idempotente } e \in S \text{ ist } e S e \in \underline{M}\}$$

heißt die *Lokalisierung* von $\underline{M}$.

Definition 7:

$\underline{S}_1$ und $\underline{S}_2$ seien beliebige Klassen von Halbgruppen.

$\underline{S}_2$ heißt $\underline{S}_1$ -untergeordnet, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

(i) Für jeden Homomorphismus

$$f : U \longrightarrow V \quad \text{mit} \quad U, V \in \underline{S}_1$$

und jede Unterhalbgruppe K_2 von V , die zu $\underline{S}_2$ gehört, gibt es eine Unterhalbgruppe K_1 von U , die zu $\underline{S}_2$ gehört, so daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & V \\ \uparrow & & \uparrow \\ K_1 & \xrightarrow{f} & K_2 \end{array}$$

kommutiert, das heißt $f(K_1) = K_2$.

- (ii) Für $U, V \in \underline{S}_1$ und $K \in \underline{S}_2$ mit $K \hookrightarrow U \times V$
 gibt es $K_1, K_2 \in \underline{S}_2$ mit $K_1 \hookrightarrow U$, $K_2 \hookrightarrow V$
 und

$$\begin{array}{ccc} K & \hookrightarrow & U \times V \\ & \searrow & \uparrow \\ & & K_1 \times K_2 \end{array}$$

kommutiert.

Bemerkungen 8:

- a) Falls $\underline{S}_2$ abgeschlossen ist unter Quotientenbildung,
 so ist die Bedingung (ii) in obiger Definition auto-
 matisch erfüllt: $K_1 = p_U(K)$ und $K_2 = p_V(K)$, wobei p_U
 und p_V die Projektionsabbildungen sind, gehören dann
 zu $\underline{S}_2$ und es gilt

$$\begin{array}{l} K_1 \hookrightarrow U, \\ K_2 \hookrightarrow V, \end{array}$$

und

$$\begin{array}{ccc} K & \hookrightarrow & U \times V \\ & \searrow & \uparrow \\ & & K_1 \times K_2 \end{array}$$

kommutiert.

b) $\underline{S}_2$ ist $\underline{S}_1$ -untergeordnet genau dann, wenn $\underline{S}_2 \cap \underline{S}_1$
 $\underline{S}_1$ -untergeordnet ist.

c) $\underline{S}_3$ sei $\underline{S}_2$ -untergeordnet, $\underline{S}_2$ sei $\underline{S}_1$ -untergeordnet und
 $\underline{S}_3 \subseteq \underline{S}_2$.

Dann ist $\underline{S}_3$ auch $\underline{S}_1$ -untergeordnet:

Sei $U, V \in \underline{S}_1$, $K \in \underline{S}_3$ und

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & V \\ & & \uparrow \\ & & K \end{array}$$

Da $\underline{S}_3 \subseteq \underline{S}_2$, gibt es $K' \rightarrow U$ mit $K' \in \underline{S}_2$ und $f(K') = K$.

Da $\underline{S}_3$ $\underline{S}_2$ -untergeordnet ist, gibt es zu

$$\begin{array}{ccc} K' & \xrightarrow{f} & K \\ & & \uparrow \\ & & K \end{array}$$

ein $K'' \in \underline{S}_3$, $K'' \rightarrow K'$ mit $f(K'') = K$.

Beispiele 9:

- (a) Die Klasse SL aller Halbgruppen mit Linkseins ist S-untergeordnet:

Es seien $U, V \in \underline{S}$, $f : U \longrightarrow V$ und K eine beliebige Unterhalbgruppe von V , die zu SL gehört. Wir betrachten eine minimale Teilmenge H von U mit den Eigenschaften:

- H ist Unterhalbgruppe von U
- $f(H) = K$.

H existiert, da U endlich ist.

Sei $H' = \{h \in H \mid f(h) = e\}$, wobei e die Linkseins von K ist. H' ist eine Unterhalbgruppe von H , besitzt also ein idempotentes Element $g \in H'$. Nun ist gH eine Unterhalbgruppe von H mit

$$f(gH) = f(g) \cdot f(H) = e \cdot K = K.$$

Wegen der Minimalität von H ist also $gH = H$.

Nun folgt: g ist Linkseins für H , denn jedes Element von H läßt sich darstellen in der Form gh mit $h \in H$, also $g \cdot (gh) = gh$.

Also ist (i) aus Definition 6 erfüllt.

(ii) ist ebenfalls erfüllt, denn für $U \in \underline{SL}$ und jeden S -Homomorphismus f ist auch $f(U) \in \underline{SL}$, also folgt (ii) aus Bemerkung 8a.

Man beachte, daß $\underline{SL}$ keine S -Varietät ist:

Sei U eine Halbgruppe ohne Linkseins, $V = U \cup \{1\}$ das durch Adjunktion eines Einselements an U entstehende Monoid. Es gilt:

$$V \in \underline{SL}, U \xrightarrow{\quad} V, \text{ aber } U \notin \underline{SL}.$$

(b) Die Klasse $\underline{Q}$ der rechtskürzbaren Halbgruppen ist eine S -Varietät, die der Klasse $\underline{S}$ aller Halbgruppen untergeordnet ist.

$$1.) S_1 \in \underline{Q}, S_2 \xrightarrow{\quad} S_1 \implies S_2 \in \underline{Q}$$

$$2.) S_1 \in \underline{Q}, S_1 \xrightarrow[\phi]{\quad} S_2$$

Da S_1 endlich ist, ist die Rechtskürzbarkeit in S_1 äquivalent zu

$$\forall s \in S_1 \quad S_1 s = S_1.$$

Dann ist aber $\phi(S_1) \cdot \phi(s) = \phi(S_1)$,

also $S_2 \cdot s' = S_2$ für alle $s' \in S_2$

und daher $S_2 \in \underline{Q}$.

3.) $S_1, S_2 \in \underline{Q} \longrightarrow S_1 \times S_2 \in \underline{Q}$.

Also ist $\underline{Q}$ eine S-Varietät.

4.) Es seien $U, V \in S$, $K \in \underline{Q}$ mit

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\phi} & V \\ & & \uparrow \\ & & K \end{array}$$

L sei eine minimale Teilmenge von U mit

- L ist Unterhalbgruppe von U
- $\phi(L) = K$.

Weil U endlich ist, existiert L .

Für jedes $s \in L$ gilt $L \cdot s \cdot L \cdot s \subseteq Ls$, denn L ist Unterhalbgruppe von U . Wegen $Ls \subseteq L$ ist also Ls eine Unterhalbgruppe von L .

Außerdem ist

$$\phi(Ls) = \phi(L) \cdot \phi(s) = K \cdot \phi(s) = K ,$$

also folgt wegen der Minimalität von $L : Ls = L$.

Das heißt aber: L ist rechtskürzbar, also folgt (i).

5.) Da $\underline{Q}$ eine S -Varietät ist, gilt auch (ii) .

(c) Die Klasse $\underline{M}$ aller Monoide ist $\underline{S}$ -untergeordnet.

$\underline{SL}$ und $\underline{SR}$ seien definiert wie in (a) .

Es ist $\underline{M} = \underline{SL} \cap \underline{SR}$, denn wenn in einer Halbgruppe eine Linkseins und eine Rechtseins existieren, so sind sie gleich. Für jeden Morphismus $\phi : U \longrightarrow V$ in $\underline{S}$ und jede Unterhalbgruppe K von V , die zu $\underline{M}$ gehört, gehört die minimale Unterhalbgruppe H von U , für die $f(H) = K$ gilt, sowohl zu $\underline{SL}$, als auch zu $\underline{SR}$.

(d) Die triviale S - (bzw. M -)-Varietät $\underline{I} = \{\{1\}\}$ ist jeder Klasse untergeordnet.

(e) Es seien $\underline{X}$, $\underline{Y}$, $\underline{V}$ Klassen von Halbgruppen , $\underline{X} \in \underline{Y}$.

Ist $\underline{V}$ $\underline{Y}$ -untergeordnet, so ist $\underline{V}$ auch $\underline{X}$ -untergeordnet.

Lemma 10:

Es seien $\underline{V}$, $\underline{X}$, $\underline{Y}$ Klassen von Halbgruppen, $\underline{X} \subseteq \underline{V}$ und $\underline{X}$ abgeschlossen unter Bildung von Unterhalbgruppen.

$\underline{X}$ und $\underline{Y}$ seien $\underline{V}$ -untergeordnet. Dann ist auch $\underline{X} \cap \underline{Y}$ $\underline{V}$ -untergeordnet.

Beweis:

Zunächst ist $\underline{X} \cap \underline{Y}$ $\underline{X}$ -untergeordnet:

Seien $U, V \in \underline{X}$, $K \in \underline{X} \cap \underline{Y}$ mit

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & V \\ & & \updownarrow \\ & & K \end{array}$$

Da $K \in \underline{Y}$ und $V \in \underline{V}$ gibt es $K' \in \underline{Y}$, $K' \hookrightarrow U$ mit $f(K') = K$.

Da $U \in \underline{X}$ und K' Unterhalbgruppe von U ist, folgt $U \in \underline{X} \cap \underline{Y}$.

Nun seien $U, V \in \underline{X}$, $K \in \underline{X} \cap \underline{Y}$ mit

$$K \hookrightarrow U \times V.$$

Da $K \in \underline{Y}$, $U, V \in \underline{V}$, gibt es $Y_1, Y_2 \in \underline{Y}$ mit

$$\begin{array}{ccc} K & \hookrightarrow & U \times V \\ & \searrow & \uparrow \quad \uparrow \\ & & Y_1 \times Y_2 \end{array}$$

Wieder ist $Y_1 \times Y_2$ Unterhalbgruppe von $U \times V \in \underline{X}$,
also $Y_1 \times Y_2 \in \underline{X} \cap \underline{Y}$. ///

Beispiel 11:

Die Klasse $\underline{G}$ aller endlichen Gruppen ist $\underline{S}$ -untergeordnet:
 $\underline{G} = \underline{SL} \cap \underline{Q}$, denn jedes $G \in \underline{SL} \cap \underline{Q}$ besitzt eine Linkseins
und ist rechtskürzbar, also linkseinfach.

Jede linkseinfache Halbgruppe mit Linkseins ist aber eine
Gruppe. Da $\underline{Q}$ eine S -Varietät ist, ist $\underline{G}$ $\underline{S}$ -unterge-
ordnet nach Lemma 10.

Theorem 12:

$\underline{V}$ und $\underline{W}$ seien S -Varietäten, $\underline{X} \subseteq \underline{S}$ und $\underline{X}$ sei $\underline{V}$ -unter-
geordnet.

Dann gilt:

(i) Die Menge

$$\left(\underline{X} \xrightarrow{\underline{V}} \underline{W} \right) = \{ V \in \underline{V} \mid X \in V \wedge X \in \underline{X} \\ \implies \underline{X} \in \underline{W} \}$$

ist eine S-Varietät.

(ii) $\left(\underline{X} \xrightarrow{\underline{V}} \underline{W} \right)$ ist die größte S-Varietät $\underline{Z}$ mit

$$\begin{aligned} - \underline{Z} &\subseteq \underline{V} \\ - \underline{Z} \cap \underline{X} &\subseteq \underline{W} . \end{aligned}$$

(iii) Falls $\underline{W} \subseteq \underline{X}$, gilt in (ii) : $\underline{Z} \cap \underline{X} = \underline{W}$.

Beweis:

(i) Sei $S \in \left(\underline{X} \xrightarrow{\underline{V}} \underline{W} \right)$, $V \in \underline{S}$ und

a) $V \twoheadrightarrow S$. Jede Unterhalbgruppe X von V , die zu $\underline{X}$ gehört, ist eine Unterhalbgruppe von S und gehört daher zu $\underline{W}$, also ist

$$V \in \left(\underline{X} \xrightarrow{\underline{V}} \underline{W} \right) .$$

b) $S \twoheadrightarrow V$. Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} S & \twoheadrightarrow & V \\ & & \uparrow \\ & & X \end{array}$$

mit $X \in \underline{X}$ läßt sich komplettieren zu

$$\begin{array}{ccc} S & \twoheadrightarrow & V \\ \uparrow & & \uparrow \\ L & \twoheadrightarrow & X \end{array}$$

mit $L \in \underline{X}$, da $\underline{X}$ $\underline{V}$ -untergeordnet ist.

Nun ist $L \in \underline{W}$, also auch $X \in \underline{W}$ und daher

$$V \in \left(\underline{X} \xrightarrow{\underline{V}} \underline{W} \right)$$

Schließlich seien $S, T \in \left(\underline{X} \xrightarrow{\underline{V}} \underline{W} \right)$ und $X \in \underline{X}$

mit $X \hookrightarrow S \times T$. Da $\underline{X}$ $\underline{V}$ -untergeordnet

ist, gibt es $X_1, X_2 \in \underline{X}$ mit

$$\begin{array}{ccc} X & \hookrightarrow & S \times T \\ & \searrow & \uparrow \quad \uparrow \\ & & X_1 \times X_2 \end{array}$$

Da $S, T \in (\underline{X} \xrightarrow{V} \underline{W})$, folgt $X_1, X_2 \in \underline{W}$,

also auch $X \in \underline{W}$ und daher $S \times T \in (\underline{X} \xrightarrow{V} \underline{W})$.

Da auch $\{1\} \in (\underline{X} \xrightarrow{V} \underline{W})$, ist $(\underline{X} \xrightarrow{V} \underline{W})$

abgeschlossen unter beliebigen endlichen Produkten.

(ii) Für $V \in (\underline{X} \xrightarrow{V} \underline{W}) \cap \underline{X}$ folgt $V \subseteq V, V \in \underline{X}$,
also $V \in \underline{W}$.

Daher ist $(\underline{X} \xrightarrow{V} \underline{W})$ eine Lösung von $\underline{Z} \cap \underline{X} \subseteq \underline{W}$.

Sei also $\underline{Z}$ eine beliebige S-Varietät mit $\underline{Z} \subseteq \underline{V}$
und $\underline{Z} \cap \underline{X} \subseteq \underline{W}$. Sei $S \in \underline{Z}$ und $X \in \underline{X}$ mit $X : S$.

Dann ist $X \in \underline{X} \cap \underline{Z}$, also $X \in \underline{W}$, das heißt

$$S \in (\underline{X} \xrightarrow{V} \underline{W})$$

(iii) Für $\underline{W} \subseteq \underline{X}$ gilt $\underline{W} \subseteq (\underline{X} \xrightarrow{V} \underline{W})$, also

$$(\underline{X} \xrightarrow{V} \underline{W}) \cap \underline{X} = \underline{W} \quad ///$$

Für M-Varietäten $\underline{V}$ lautet die entsprechende Aussage:

Theorem 12':

$\underline{V}$ sei eine M-Varietät, $\underline{W}$ eine S-Varietät, $\underline{X} \in \underline{M}$, $\underline{X}$ sei $\underline{V}$ -untergeordnet.

Dann gilt:

- (i) Die Menge $\left(\underline{X} \xrightarrow{\underline{V}} \underline{W} \right) = \{ V \in \underline{V} \mid X \in V \wedge X \in \underline{X} \implies X \in \underline{W} \}$
ist eine M-Varietät.

- (ii) $\left(\underline{X} \xrightarrow{\underline{V}} \underline{W} \right)$ ist die größte M-Varietät $\underline{Z}$ mit

$$\begin{aligned} - \underline{Z} &\subseteq \underline{V} \\ - \underline{Z} \cap \underline{X} &\subseteq \underline{W} . \end{aligned}$$

- (iii) Falls $\underline{W} \subseteq \underline{X}$, gilt in (ii): $\underline{Z} \cap \underline{X} = \underline{W}$.

Der Beweis verläuft völlig parallel zum Beweis von Theorem 12.

///

Korollar 13:

Es sei $\underline{M}'$ eine M -Varietät. Dann ist $\underline{LM}'$ eine S -Varietät.

Beweis:

Wir zeigen zunächst:

$$\underline{LM}' = (\underline{M} \xrightarrow{S} (\underline{M}')_S)$$

Es sei $S \in \underline{LM}'$, und M ein beliebiges Monoid enthalten in S , mit Einselement e . Dann ist $M = eMe \subseteq eSe \in \underline{M}'$, also $M \in (\underline{M}')_S$.

Umgekehrt sei $S \in (\underline{M} \xrightarrow{S} (\underline{M}')_S)$ und e idempotent, $e \in S$. eSe ist ein Monoid, also $eSe \in (\underline{M}')_S \implies eSe \in (\underline{M}')_S \cap \underline{M} = \underline{M}'$. Also folgt die Behauptung aus Theorem 12. ///

Es gilt stets

$$(\underline{X} \xrightarrow{V} \underline{W}) = (\underline{X} \xrightarrow{V} \underline{W} \cap \underline{X}) ,$$

also ist

$$\underline{LM}' = (\underline{M} \xrightarrow{S} \underline{M}') .$$

Beispiele 14:

- a) Die Klasse SR bzw. SL der Halbgruppen mit Rechtseins bzw. Linkseins ist S-untergeordnet.

Also sind

$$\underline{K} := (\underline{SL} \xrightarrow{\underline{S}} \underline{I}) , \quad \underline{K}^r := (\underline{SR} \xrightarrow{\underline{S}} \underline{I})$$

S-Varietäten. Es gilt:

$$\underline{K} = \{S \in \underline{S} \mid e^2 = e \in S \implies eS = e\} .$$

Sei nämlich $S \in (\underline{SL} \xrightarrow{\underline{S}} \underline{I})$ und $e \in S$ idempotent. eS ist Unterhalbgruppe von S mit Linkseins e . Da $eS \in \underline{I}$, folgt $eS = e$.

Umgekehrt gelte für jedes Idempotente $e \in S$ $eS = e$.

Jede Unterhalbgruppe U von S mit $U \in \underline{SL}$ besitzt eine Linkseins e . Nun gilt: $e \cdot e = e$, also $eS = e$.

Wegen $eU \subseteq eS$ folgt

$$U = eU \subseteq eS \in \underline{I} .$$

$$\text{b) } (\underline{M} \xrightarrow{\underline{S}} \underline{I}) = \underline{LI} = \{S \in \underline{S} \mid e^2 = e \in S \implies eSe = e\} .$$

- c) Die Klasse $\underline{Q}$ der rechtskürzbaren (= linkseinfachen) Halbgruppen ist $\underline{M}$ -untergeordnet.

Daher ist

$$(\underline{Q} \xrightarrow{\underline{M}} \underline{I})$$

eine $\underline{M}$ -Varietät.

Es gilt:

$$\underline{L} \subseteq (\underline{Q} \xrightarrow{\underline{M}} \underline{I}) .$$

Sei nämlich

$$M \in \underline{L} \text{ und } K \in \underline{Q} \text{ mit } K \subset M$$

$$\implies \forall m \in K \quad Km = K$$

$$\implies \forall a, b \in K \quad \exists c, d \in K \quad ca = b, db = a .$$

Also ist K enthalten in einer $\mathfrak{A}$ -Klasse von $\underline{M}$.

Da $M \in \underline{L}$, folgt $K \in \underline{I}$.

- d) $\underline{SL} \cap \underline{Q}$ ist $\underline{M}$ -untergeordnet nach Beispiel 11, also ist

$$\underline{AP} = (\underline{SL} \cap \underline{Q} \xrightarrow{\underline{M}} \underline{I}) ,$$

denn $\underline{SL} \cap \underline{Q} = \underline{G}$ (vgl. Lemma 2.14).

Für jede endliche Halbgruppe S gibt es eine natürliche Zahl n , so daß gilt:

$$\forall s \in S \quad s^n \text{ ist idempotent.}$$

Jede solche Zahl heißt ein *Exponent* für S .

Ist k ein Exponent für S , so ist auch $\text{kgV}(1, 2, \dots, n) =: \bar{n}$ ein Exponent für alle $n \geq k$.

Theorem 15:

Es sei $\underline{V}$ eine S -Varietät und $(u_i = v_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Gleichungen, die $\underline{V}$ schließlich definiert. Es sei weiter

$$u_i = y_1 \dots y_{n_i}, \quad v_i = z_1 \dots z_{m_i} \quad \text{und} \quad y_1, \dots, y_{n_i},$$

$z_1, \dots, z_{m_i}$ die Variablen.

Dann ist

$$(a_i = b_i)_{i \in \mathbb{N}}$$

mit $a_i = x^{\bar{1}}_{y_1} x^{\bar{1}}_{y_2} \dots x^{\bar{1}}_{y_{n_i}}$ oder $= x^{\bar{1}}$ für $u_i = 1$

$b_i = x^{\bar{1}}_{z_1} x^{\bar{1}}_{z_2} \dots x^{\bar{1}}_{z_{m_i}}$ oder $= x^{\bar{1}}$ für $v_i = 1$

eine Folge von Gleichungen, die schließlich

$$(\underline{S} \xrightarrow{\underline{S}} \underline{V})$$

definiert.

Beweis:

Es sei $S \in \underline{S}$ so, daß die Gleichungen $(a_i = b_i)_{i \geq k}$ erfüllt sind und e idempotent.

Dann ist

$$e^{\bar{1}} y_1 \dots e^{\bar{1}} y_{n_i} = e^{\bar{1}} z_1 \dots e^{\bar{1}} z_{m_i}, \text{ also}$$

$$e y_1 \dots e y_{n_i} = e z_1 \dots e z_{m_i}.$$

Also gelten in eS die Gleichungen

$$y_1 \dots y_{n_i} = z_1 \dots z_{m_i} \quad (i \geq k).$$

Jede Unterhalbgruppe T von S , die zu $\underline{S}$ gehört, ist enthalten in einem eS für ein geeignetes idempotentes $e \in S$, also gelten in jedem T die Gleichungen

$$(u_i = v_i)_{i \geq k}.$$

Umgekehrt sei $S \in (\underline{SL} \xrightarrow{\underline{S}} \underline{V})$ und k ein Exponent für S .

Dann gilt für alle $x, y \in S$: $x^k y \in eS$ ($e = x^k$). Da $eS \in \underline{V}$, gelten in eS die Gleichungen $u_i = v_i$ ($i \geq 1$). Also gelten in S die Gleichungen

$$(a_i = b_i)_{i \geq \max(k, l)} . \quad ///$$

Korollar 16:

Es sei $\underline{M'}$ eine Varietät von Monoiden und $(u_i = v_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Gleichungen, die $\underline{M'}$ schließlich definiert, wobei

$$u_i = y_1 \dots y_{n_i} , \quad v_i = z_1 \dots z_{m_i} .$$

Dann ist

$$(a_i = b_i)_{i \in \mathbb{N}}$$

mit
$$a_i = x^{\bar{1}} y_1 x^{\bar{1}} y_2 \dots x^{\bar{1}} y_{n_i} x^{\bar{1}} \text{ oder } = x^{\bar{1}} \text{ für } u_i = 1$$

$$b_i = x^{\bar{1}} z_1 x^{\bar{1}} z_2 \dots x^{\bar{1}} z_{m_i} x^{\bar{1}} \text{ oder } = x^{\bar{1}} \text{ für } v_i = 1$$

eine Folge von Gleichungen, die $\underline{LM'}$ schließlich definiert.

Beweis:

wie im Theorem 15. ///

Theorem 17:

$\underline{V}$, $\underline{W}$ seien S-Varietäten, $\underline{X}$ und $\underline{Y}$ seien Klassen von Halbgruppen mit

- $\underline{W} \subseteq \underline{X} \cap \underline{Y}$
- $\underline{X}$, $\underline{Y}$ und $\underline{X} \cap \underline{Y}$ sind $\underline{V}$ -untergeordnet.

Dann ist

$$\left(\underline{X} \xrightarrow{\underline{V}} \left(\underline{Y} \xrightarrow{\underline{V}} \underline{W} \right) \right) = \left(\underline{X} \cap \underline{Y} \xrightarrow{\underline{V}} \underline{W} \right)$$

Beweis:

$\left(\underline{X} \xrightarrow{\underline{V}} \left(\underline{Y} \xrightarrow{\underline{V}} \underline{W} \right) \right)$ ist die größte S-Varietät $\underline{A}$, für die

$$(I) \quad \underline{A} \cap \underline{X} \subseteq \left(\underline{Y} \xrightarrow{\underline{V}} \underline{W} \right) \text{ und } \underline{A} \subseteq \underline{V} .$$

(I) ist äquivalent zu

$$(II) \quad \underline{Z} \cap \underline{X} \cap \underline{Y} = \underline{W} \text{ mit } \underline{Z} \subseteq \underline{V} .$$

Sei nämlich $\underline{A}$ eine Lösung von (I). Dann ist auch $\underline{W} \vee \underline{A}$ eine Lösung von (I), also o.B.d.A. $\underline{W} \subseteq \underline{A}$.

Wegen $(\underline{X} \xrightarrow{\underline{V}} \underline{W}) \wedge \underline{X} = \underline{W}$

folgt $\underline{A} \wedge \underline{X} \wedge \underline{Y} \subseteq \underline{W}$

und da $\underline{W} \subseteq \underline{X} \wedge \underline{Y}$,

ist sogar $\underline{A} \wedge \underline{X} \wedge \underline{Y} = \underline{W}$.

Umgekehrt sei $\underline{Z}$ eine Lösung von (II).

Dann ist $\underline{Z} \wedge \underline{X} \subseteq (\underline{Y} \xrightarrow{\underline{V}} \underline{W})$, denn $(\underline{Y} \xrightarrow{\underline{V}} \underline{W})$ ist die größte Lösung von $\underline{B} \wedge \underline{Y} = \underline{W}$.

Also gilt (I).

(I) und (II) haben daher die gleiche größte Lösung.

Da $\underline{X} \wedge \underline{Y}$ $\underline{V}$ -untergeordnet ist, folgt die Behauptung. ///

Beispiele 18:

- a) Jeder Halbgruppenhomomorphismus zwischen zwei Gruppen ist ein Gruppenhomomorphismus. Daher ist jede G-Varietät $\underline{G}'$ auch eine S-Varietät und da $\underline{G} = \underline{Q} \cap \underline{SL}$ gilt für jede S-Varietät $\underline{V}$:

$$\left(\underline{Q} \xrightarrow{\underline{V}} (\underline{SL} \xrightarrow{\underline{V}} \underline{G}') \right) = (\underline{G} \xrightarrow{\underline{V}} \underline{G}') .$$

- b) Für jede S-Varietät $\underline{W}$ ist

$$(\underline{M} \xrightarrow{\underline{S}} \underline{W}) = \left(\underline{SL} \xrightarrow{\underline{S}} (\underline{SR} \xrightarrow{\underline{S}} \underline{W}) \right) .$$

Korollar 19:

Für jede M-Varietät $\underline{M}'$ ist

$$\underline{LLM}' = \underline{LM}' .$$

Beweis:

$$\underline{LLM}' = \left(\underline{M} \xrightarrow{\underline{S}} (\underline{M} \xrightarrow{\underline{S}} \underline{M}') \right) = (\underline{M} \xrightarrow{\underline{S}} \underline{M}') = \underline{LM}' . \quad ///$$

§ 4

Testbarkeit

Definition 1:

Für ein Wort $w \in \Sigma^*$ bezeichne $\alpha_1(w)$ die Menge
 $\{\sigma \in \Sigma \mid \exists u, v \in \Sigma^* w = u \sigma v\}$.

Für $k \in \mathbb{N}$ sei

$$\begin{aligned} R_k = \{ (u\sigma, u) \mid \exists u_1, \dots, u_k \in \Sigma^* \\ \text{mit } u = u_1 \cdot \dots \cdot u_k \\ \text{und } \alpha_1(u_1) \supseteq \dots \supseteq \alpha_1(u_k) \ni \sigma \} , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_k = \{ (u, \sigma u) \mid \exists u_1, \dots, u_k \in \Sigma^* \\ \text{mit } u = u_k \cdot \dots \cdot u_1 \\ \text{und } \sigma \in \alpha_1(u_k) \subseteq \dots \subseteq \alpha_1(u_1) \} , \end{aligned}$$

und $\rho_k = \bar{R}_k$, $\lambda_k = \bar{L}_k$.

Definition 2:

Für $k \in \mathbb{N}$ sei $\Sigma^{(k)} = \bigcup_{i=1}^k \Sigma^i$.

$u \in \Sigma^*$ heißt ein *Unterwort* von $v \in \Sigma^*$, falls

$u = u_1 \cdot \dots \cdot u_n$ und $v = v_1 \cdot u_1 \cdot v_2 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot v_n \cdot u_n \cdot v_{n+1}$
mit $n \in \mathbb{N}$ und $u_i, v_i \in \Sigma^*$ ($i = 1, \dots, n$); i.Z. $u \leq v$.

$$\sim_k := \{ (v, w) \in \Sigma^* \times \Sigma^* \mid \forall u \in \Sigma^{(k)} \quad u \leq v \iff u \leq w \}.$$

Lemma 3:

Seien $u, v \in \Sigma^*$. Dann gilt

$$(u \vee v, u) \in \rho_k \iff u \vee v \sim_k u.$$

Beweis:

Es genügt, den Fall $v = \sigma \in \Sigma$ zu betrachten, denn dann folgt die Behauptung mittels Transitivität durch mehrfache Anwendung.

$$" \longleftarrow " : \text{Sei } u \sigma \sim_k u.$$

Für $k = 1$ folgt: $\sigma \in \alpha_1(u)$, also $(u \sigma, u) \in R_1 \subseteq \rho_1$.

Für $n = k+1$ sei u_0 das kürzeste Anfangssegment von u ,
für das $\alpha_1(u_0) = \alpha_1(u)$. $u_0 \neq \Lambda$, da $\sigma \leq u$, also
auch $\sigma \leq u_0$.

$$u_0 = u'_0 \tau \quad (\tau \in \Sigma, u'_0 \in \Sigma^*) .$$

Da u_0 minimal ist, kommt τ in u'_0 nicht vor.

Nun gilt für $u = u_0 w$

$$w \sigma \sim_k w .$$

Denn es sei $s \in \Sigma^{(k)}$, $s \leq w \sigma$.

Dann ist

$$\tau s \in \Sigma^{(k+1)}$$

mit

$$\tau s \leq u_0 w \sigma = u \sigma \sim_{k+1} u$$

also

$$\tau s \leq u = u_0 w = u'_0 \tau w .$$

Da $\tau \notin u'_0$, folgt $\tau s \leq \tau w$, also $s \leq w$.

Nach Induktionshypothese ist $w = u_1 \cdot \dots \cdot u_k$

mit $\alpha_1(u_1) \geq \dots \geq \alpha_1(u_k)$.

Nun folgt $u = u_0 \cdot u_1 \cdot \dots \cdot u_k$

mit $\alpha_1(u_0) \geq \alpha_1(u_1) \geq \dots \geq \alpha_1(u_k) \geq \sigma$,

also $(u \sigma, u) \in R_{k+1}$.

" $\implies$ " : Sei $(u \sigma, u) \in \rho_k$ und $u_1 \cdot \dots \cdot u_k = u$ die Zerlegung von u , für die gilt:

Für jedes $i = 1, \dots, k-1$ ist u_i das kürzeste Anfangssegment von $u_1 \cdot \dots \cdot u_k$, das alle Buchstaben von $u_i \cdot \dots \cdot u_k$ enthält:

$$\alpha_1(u_i) = \alpha_1(u_1 \cdot \dots \cdot u_k).$$

Dann ist

$$\begin{aligned} (u\tau, u) \in \rho_k &\iff \tau \in \alpha_1(u_k) \\ &\iff (u\tau, u) \in R_k. \end{aligned}$$

Also ist $(u\sigma, u) \in R_k$

Sei nun

$$w \in \Sigma^{(k)} \text{ mit } w \leq u\sigma$$

o.B.d.A. ist

$$w \leq w'\sigma, \quad w' = \sigma_1 \cdot \dots \cdot \sigma_{k-1} \quad (\sigma_i \in \Sigma) \quad .$$

Dann ist

$$w' \leq u = u_1 \cdot \dots \cdot u_k \quad .$$

Es gilt sogar:

$$w' \leq u_1 \cdot \dots \cdot u_{k-1} \quad ,$$

denn

$$\sigma_1 \in \alpha_1(u_1) \quad .$$

Falls für alle $i = 2, \dots, k-1$ $\sigma_i \in \alpha_1(u_i)$,

dann ist

$$w' \leq u_1 \cdot \dots \cdot u_{k-1} \quad .$$

Falls $\sigma_i \notin \alpha_1(u_i)$ $2 \leq i \leq k-1$, dann muß wegen $w' \leq u$ und

$$\alpha_1(u_1) \supseteq \dots \supseteq \alpha_1(u_k)$$

sogar $\sigma_1 \cdot \dots \cdot \sigma_i \leq u_1 \cdot \dots \cdot u_{i-1}$ gelten,
also ebenfalls

$$w' \leq u_1 \cdot \dots \cdot u_{k-1}.$$

Wegen $\sigma \in \alpha_1(u_k)$ gilt

$$w'\sigma = w \leq u.$$

///

Definition 4:

Für $k \in \mathbb{N}$ sei die Abbildung $p_k : \Sigma^* \longrightarrow \Sigma^*$ definiert durch

$$p_0(u) = \Lambda \text{ für alle } u \in \Sigma^*.$$

Für $k \neq 0$

sei $p_k(\Lambda) = \Lambda$

$$p_k(\sigma) = \sigma \quad (\sigma \in \Sigma)$$

und für $u \in \Sigma^*, \sigma \in \Sigma$

sei

$$p_k(u\sigma) = \begin{cases} p_k(u) & , \text{ falls } (u\sigma, u) \in R_k \\ p_k(u) \cdot \sigma & \text{sonst.} \end{cases}$$

$s_k : \Sigma^* \longrightarrow \Sigma^*$ sei definiert durch

$$s_k(u) = (p_k(u^r))^r ,$$

wobei u^r das zu u gespiegelte Wort bezeichne.

Eigenschaften 5 von p_k und s_k :

$$(1) \quad p_k(u\sigma) = p_k(u) \iff u\sigma \sim_k u$$

Daher gilt:

$$\begin{aligned} p_k(uv) &= p_k(p_k(u) \cdot p_k(v)) = p_k(p_k(u) \cdot v) \\ &= p_k(u \cdot p_k(v)) \end{aligned}$$

$p_k(u)$ ist Anfangssegment von $p_k(uv)$ für alle $u, v \in \Sigma^*$.

(2) Für $u \in \Sigma^*$ ist $u \sim_k p_k(u)$ (Lemma 3).

Daher ist

$$p_k(u) = p_k(v) \implies u \sim_k v ,$$

also $\ker p_k \subseteq \sim_k$

und $\ker s_k \subseteq \sim_k$.

(3) $p_k(p_k(u)) = p_k(u)$ für alle $u \in \Sigma^*$.

(4) Sei $p_k(v) = x_1 \cdot \dots \cdot x_n$ mit $x_i \in \Sigma$ ($i = 1, \dots, n$).

Dann existiert ein $w \leq v$ mit

$$p_k(w) = x_1 \cdot \dots \cdot x_{n-1} .$$

(5) Seien $u \in \Sigma^k$, $\sigma \in \Sigma$.

Da $p_0(u\sigma) = p_0(u)$,

aber $p_{k+1}(u\sigma) \neq p_{k+1}(u)$,

gibt es ein maximales r mit

$$p_r(u\sigma) = p_r(u) .$$

$v \in \Sigma^r$ mit $v \leq u$ und $v\sigma \not\leq u$ heißt *kritisch* für $u\sigma$.

Lemma 6:

$$\rho_k = \ker p_k \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Beweis:

$\ker p_k$ ist Kongruenzrelation, denn

$$\begin{aligned} p_k(u) = p_k(v) &\implies \\ \forall w \in \Sigma^* \quad p_k(uw) = p_k(vw) \text{ und} & \\ p_k(wu) = p_k(wp_k(u)) & \quad (\text{Eigenschaft (1)}) \\ &= p_k(wp_k(v)) \\ &= p_k(wv) . \end{aligned}$$

Da $R_k \subseteq \ker p_k$, ist $\rho_k \subseteq \ker p_k$.

Umgekehrt sei

$$p_k(u) = p_k(v) = w .$$

Dann sind

$$(u, w) \in \bar{R}_k$$

$$\text{und} \quad (v, w) \in \bar{R}_k ,$$

nach Konstruktion von p_k , also $(u, v) \in \rho_k$.

///

Bemerkung 7:

p_k ist ein Algorithmus, der zu jedem $w \in \Sigma^*$ seinen kürzesten Repräsentanten in seiner ρ_k -Klasse liefert:

Wegen $|p_k(w)| \leq |w|$ und $p_k(p_k(w)) = p_k(w)$ ist $p_k(w)$ eindeutig bestimmtes minimales Element in $[w]_{\rho_k}$.

Beispiel 8:

$$\begin{aligned}w &= \text{aabaababba} , & k &= 3 \\p_k(w) &= \text{aabaabab} \\s_k(w) &= \text{ababba}\end{aligned}$$

Theorem 9:

ρ_k und λ_k sind vollinvariante Kongruenzrelationen mit endlichem Index.

Beweis:

1. Es sei $(u, v) \in \rho_k$,

das heißt $p_k(u) = p_k(v)$

und $f : \Sigma^* \longrightarrow \Sigma^*$ ein Endomorphismus.

Dann ist

$$\begin{aligned} p_k(f(u)) &= p_k(f(p_k(u))) = p_k(f(p_k(v))) = \\ &= p_k(f(v)) . \end{aligned}$$

2. Wir nehmen an, im p_k sei unendlich.

Nach Eigenschaft (4) von p_k ist im p_k ein Unterbaum von Σ^* . Das Unendlichkeitslemma von D. KÖNIG liefert dann einen unendlichen Pfad in Σ^* , d.h. eine Folge

$$v_0, v_1, v_2, \dots$$

mit
$$v_{i+1} = v_i w_{i+1} \text{ und } w_{i+1} \neq \Lambda .$$

Da $\Sigma^{(k)}$ endlich ist, gibt es ein $i \in \mathbb{N}$ mit

$$v_i \sim_k v_{i+1} = v_i w_{i+1} .$$

Nach Lemma 3 ist nun

$$(v_i, v_{i+1}) \in \rho_k ,$$

also
$$p_k(v_i) = p_k(v_{i+1}) .$$

Da $v_i, v_{i+1} \in \text{im } p_k$,

ist $p_k(v_i) = v_i$,

$$p_k(v_{i+1}) = v_{i+1},$$

aber $v_i \neq v_{i+1}$ nach Konstruktion. ///

Eigenschaften 10 von ρ_k und λ_k :

$$(6) \quad \rho_{k+1} \subseteq \rho_k, \text{ denn } R_{k+1} \subseteq R_k.$$

$$(7) \quad \rho_k \subseteq \sim_k, \text{ denn } R_k \subseteq \sim_k.$$

$$(8) \quad \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \rho_k = \Delta_{\Sigma^*}, \text{ denn zu } a, b \in \Sigma^*, a \neq b \text{ gibt}$$

es k mit $a, b \in \Sigma^{(k)}$.

Dann ist

$$(a, b) \notin \sim_k, \text{ also } (a, b) \notin \rho_k.$$

Definition 11:

Es sei $\pi \in \mathcal{E}(\Sigma^*)$.

π heißt

- a) k -rechtstestbar, falls $\rho_k \subseteq \pi$
- b) k -linkstestbar, falls $\lambda_k \subseteq \pi$
- c) k -stückweise testbar, falls $\sim_k \subseteq \pi$
- d) rechtstestbar, falls $\exists k \in \mathbb{N}$, $\rho_k \subseteq \pi$
- e) linkstestbar, falls $\exists k \in \mathbb{N}$, $\lambda_k \subseteq \pi$
- f) stückweise testbar, falls $\exists k \in \mathbb{N}$, $\sim_k \subseteq \pi$

Folgerungen 12:

$$\rho_k \subseteq \pi \iff R_k \subseteq \pi$$

$$\lambda_k \subseteq \pi \iff L_k \subseteq \pi$$

Theorem 13:

$\pi \in \mathcal{E}(\Sigma^*)$ ist rechtstestbar genau dann, wenn $\Sigma^*/_{\pi} \in \underline{R}$
(vgl. Def. 2.11).

Beweis:

Es sei π rechtstestbar, das heißt

$$\exists k \quad \rho_k \subseteq \pi.$$

Da ρ_k vollinvariant ist, ist jede Relation in $\Sigma^*/_{\rho_k}$ eine gültige Gleichung in $\Sigma^*/_{\pi}$. In $\Sigma^*/_{\rho_k}$ gilt für $\sigma, \tau \in \Sigma$:

$$(\sigma\tau)^k_{\sigma} = (\sigma\tau)^k,$$

$$\text{denn} \quad \rho_k((\sigma\tau)^k_{\sigma}) = \rho_k((\sigma\tau)^k).$$

Also gilt in $\Sigma^*/_{\pi}$:

$$(xy)^k_x = (xy)^k$$

$$\text{und daher} \quad \Sigma^*/_{\pi} \in \underline{R}.$$

Sei umgekehrt $\pi \in \mathcal{C}(\Sigma^*)$ mit $\Sigma^*/_{\pi} \in \underline{R}$ und $|\Sigma^*/_{\pi}| = k+1$.

Dann gilt: π ist k -rechtstestbar.

Dazu ist zu zeigen: $R_k \subseteq \pi$.

Sei also $u \in \Sigma^*$, $\sigma \in \Sigma$ mit $(u\sigma, u) \in R_k$.

Dann läßt sich u schreiben $u = u_1 \cdot \dots \cdot u_k$ mit

$$\alpha_1(u_1) \geq \dots \geq \alpha_1(u_k) \ni \sigma.$$

Nun betrachten wir die Folge

$$w_0 = \Lambda, w_1 = u_1, w_2 = u_1 u_2, w_3 = u_1 u_2 u_3, \dots$$

$$\dots w_k = u_1 \cdot \dots \cdot u_k, w_{k+1} = u_1 \cdot \dots \cdot u_k \cdot \sigma.$$

Da $|\Sigma^*/\pi| = k+1$

gibt es $i, j \in \{0, \dots, k+1\}$

mit $i < j$ und $(w_i, w_j) \in \pi$.

1. Fall: $i = k$: dann sind wir fertig.

2. Fall: $i < k$:

Wir bezeichnen $[w]_{\pi}$ durch $\bar{w}$ und Σ^*/π durch M .

Wir zeigen: $(w_i, w_i \tau) \in \pi$ für jedes $\tau \in \alpha_1(u_{i+1})$.

Sei nämlich $\tau \in \alpha_1(u_{i+1})$.

Dann ist $w_{i+1} = w_i v \tau v'$ mit $v, v' \in \Sigma^*$.

Nun gilt

$$\bar{w}_i M \supset \overline{w_i v} M \supset \overline{w_i v \tau} M \supset \bar{w}_j M .$$

Wegen $\bar{w}_i = \bar{w}_j$

ist $\bar{w}_i M = \overline{w_k v} M = \overline{w_i v \tau} M = \bar{w}_j M$

und da $M \in \underline{R}$, ist

$$\bar{w}_i = \overline{w_i v} = \overline{w_i v \tau} = \bar{w}_j ,$$

also $\bar{w}_i = \overline{w_i \tau}$,

das heißt

$$(w_i, w_i \tau) \in \underline{\pi} .$$

Aus

$\alpha_1(u_{i+1}) \supset \dots \supset \alpha_1(u_k) \supset \tau$ folgt nun

$$(w_i, w_k) \in \underline{\pi} , \quad (w_i, w_{k+1}) \in \underline{\pi}$$

und wegen

$$w_k = u \text{ auch } (u\sigma, u) \in \underline{\pi} .$$

Definition 14:

Für $r, l \in \mathbb{N}$ sei

$$M_{r, l} := \{(u\sigma v, uv) \mid (u\sigma, u) \in R_r, (\sigma v, v) \in L_l, u, v \in \Sigma^*, \sigma \in \Sigma\}$$

und $\mu_{r, l} = \overline{M_{r, l}}.$

Eigenschaften 15:

$$\begin{aligned} (1) \quad \mu_{r, 0} &= \rho_r \\ \mu_{0, l} &= \lambda_l \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \mu_{r+1, l} &\subseteq \mu_{r, l} \\ \mu_{r, l+1} &\subseteq \mu_{r, l} \end{aligned}$$

$$(3) \quad \mu_{r, l} \subseteq \rho_r \cap \lambda_l$$

(4) $M_{r, l}$ ist gegen Links- und Rechtsmultiplikation abgeschlossen.

Zu (3):

Sei $(u\sigma v, uv) \in M_{r, \ell}$;

dann ist $(u\sigma, u) \in R_r$

also $(u\sigma v, uv) \in \bar{R}_r = \rho_r$.

Die Inklusion ist i.a. echt:

$$(abaa, aba) \in \rho_2 \cap \lambda_1 \text{ aber } \notin \mu_{2,1} .$$

Lemma 16:

Jede $\mu_{r, \ell}$ -Klasse besitzt einen eindeutig bestimmten kürzesten Repräsentanten.

Beweis:

Man erhält einen minimalen Repräsentanten, indem man die verkürzenden Regeln in $M_{r, \ell}$ anwendet. Wir müssen nur zeigen, daß die Reihenfolge ihrer Anwendung keine Rolle spielt:

Sei $w \in \Sigma^*$ gegeben. $w = u\sigma v = u'\tau v'$ mit

$\sigma, \tau \in \Sigma$, $u\sigma \sim_{\mathcal{R}} u$, $u'\tau \sim_{\mathcal{R}} u'$, $\sigma v \sim_{\mathcal{L}} v$, $\tau v' \sim_{\mathcal{L}} v'$
(siehe Lemma 3)

also $(u\sigma v, uv) \in M_{\mathcal{R}, \mathcal{L}}$
 $(u'\tau v', u'v') \in M_{\mathcal{R}, \mathcal{L}}$.

Sei etwa u' ein Anfangssegment von u .

$$\begin{array}{ccc}
 \boxed{u} & \sigma & \boxed{v} \\
 \\
 \boxed{u'} & \tau & \boxed{v'} \\
 \\
 uv = u'\tau u''v & & \\
 u'v' = u'u''\sigma v & &
 \end{array}$$

Aus $u'\tau \sim_{\mathcal{R}} u'$ folgt $u'\tau u'' \sim_{\mathcal{R}} u'u''$,

also $u'u''\sigma \sim_{\mathcal{R}} u'\tau u''\sigma = u\sigma \sim_{\mathcal{R}} u = u'\tau u'' \sim_{\mathcal{R}} u'u''$.

Da $\sigma v \sim_{\mathcal{L}} v$, ist

$$(u'u''\sigma v, u'u''v) \in M_{\mathcal{R}, \mathcal{L}}.$$

Analog folgt aus

$$\sigma v \sim_{\ell} v : u'' \sigma v \sim_{\ell} u'' v ,$$

$$\text{also} \quad \tau u'' v \sim_{\ell} \tau u'' \sigma v = \tau v' \sim_{\ell} v' = u'' \sigma v \sim_{\ell} u'' v .$$

Mit $u' \tau \sim_{\mathbf{r}} u'$ folgt

$$(u' \tau u'' v, u' u'' v) \in M_{\mathbf{r}, \ell} .$$

Also führen alle Wege zum gleichen reduzierten Repräsentanten. ///

Lemma 17:

$w \in \Sigma^*$ sei reduziert in seiner $\mu_{\mathbf{r}, \ell}$ -Klasse.

Dann existieren $u, v \in \Sigma^*$ mit $w \in u \sqcup v$ und $p_{\mathbf{r}}(u) = u$, $s_{\ell}(v) = v$, das heißt, ist $A_{\mathbf{r}}$ das Repräsentantensystem für $\rho_{\mathbf{r}}$ und B_{ℓ} das Repräsentantensystem für s_{ℓ} , so ist das Repräsentantensystem für $\mu_{\mathbf{r}, \ell}$ enthalten in $A_{\mathbf{r}} \sqcup B_{\ell}$.

Beweis:

Es sei $w \in \Sigma^*$ reduziert in seiner $\mu_{\mathbf{r}, \ell}$ -Klasse, das heißt, für jedes $\sigma \in \alpha_1(w)$ gilt:

$$w = u_0 \sigma v_0 \longrightarrow p_r(u_0 \sigma) \neq p_r(u_0) \quad \text{oder} \quad s_\ell(\sigma v_0) \neq s_\ell(v_0)$$

$$\text{also} \quad p_r(u_0 \sigma) = p_r(u_0) \cdot \sigma \quad \text{oder} \quad s_\ell(\sigma v_0) = \sigma \cdot s_\ell(v_0)$$

Es sei $\sigma_1, \dots, \sigma_s$ die Folge derjenigen Buchstaben von w ,
für die $w = u_i \sigma_i v_i$ und $p_r(u_i \sigma_i) = p_r(u_i) \cdot \sigma_i$ und
 $\tau_1, \dots, \tau_t$ die Folge derjenigen Buchstaben von w , für
die $w = u'_i \tau_i v'_i$ mit

$$p_r(u'_i \tau_i) = p_r(u'_i) \cdot$$

Da w reduziert ist, folgt dann

$$s_\ell(\tau_i v'_i) = \tau_i s_\ell(v'_i) \cdot$$

Für $u = \sigma_1 \cdot \dots \cdot \sigma_s$ und $v = \tau_1 \cdot \dots \cdot \tau_t$ gilt nun
offenbar $w \in u \sqcup v$ und $p_r(u) = u$, $s_\ell(v) = v$.

Bemerkung 18:

In Lemma 17 gilt i.a. nicht die Gleichheit:

Sei $r = 2$, $\ell = 2$

$u = aaba$, $v = abaa$ sind ρ_r - bzw. λ_ℓ -reduziert, aber

$$w = \text{aaababaa} \in u \sqcup v$$

ist reduzierbar zu aababaa .

Andererseits gilt: Sind u und v ρ_r - bzw. λ_ℓ -reduziert, so ist $u \cdot v$ offenbar $\mu_{r,\ell}$ -reduziert.

Daraus folgt zusammen mit dem Lemma:

Für das Repräsentantensystem $C_{r,\ell}$ von $\mu_{r,\ell}$ gilt:

$$A_r \cdot B_\ell \in C_{r,\ell} \subseteq A_r \sqcup B_\ell,$$

wobei A_r und B_ℓ wie im Lemma definiert sind.

Beispiele 19:

1) Kürzester Repräsentant für $w = \text{aabaababbba}$

$$r = 2, \ell = 2:$$

aabaababbba



aabababbba



aabababba

$$\text{aabaa} \sim_2 \text{aaba} \wedge \text{ababbba} \sim_2 \text{babbbba}$$

$$\text{aababab} \sim_2 \text{aabab} \wedge \text{bbba} \sim_2 \text{bba}$$

$u = aabababba$ ist nicht mehr reduzierbar, da

$$p_2(u) \cdot s_2(u) = u.$$

2) $w = aabaaaab$, $r = 2$, $\ell = 2$.

$u = aabaaaab$ ist reduziert zu w , denn

$$p_2(aaba) = aaba \text{ und } s_2(aab) = aab.$$

Man beachte, daß $p_2(u) \cdot s_2(u) \neq u$ und $u \notin p_2(u) \sqcup s_2(u)$.

3) Es sei $r = 2$, $\ell = 2$ und $w = aabaacccbcc$.

w ist reduziert, aber $w \notin A_2 \cdot B_2$.

$w \in A_2 \sqcup B_2$, denn $w \in aabcc \sqcup aabcc$ und $aabcc$ ist

ρ_2 - und λ_2 -reduziert.

Theorem 20:

$\mu_{r,\ell}$ ist eine vollinvariante Kongruenzrelation mit endlichem Index.

Beweis:

Es seien

$$(u\sigma v, uv) \in M_{r, \ell} \text{ und } f \in \text{End}(\Sigma^*) .$$

Dann ist $p_r(u\sigma) = p_r(u)$ und $s_\ell(\sigma v) = s_\ell(v)$, also

$u = u_1 \cdot \dots \cdot u_r$, $v = v_\ell \cdot \dots \cdot v_1$ mit

$$\alpha_1(u_1) \supseteq \dots \supseteq \alpha_1(u_r) \supseteq \{\sigma\} \subseteq \alpha_1(v_\ell) \subseteq \dots \subseteq \alpha_1(v_1) .$$

Falls $f(\sigma) = \Lambda$, ist $f(u\sigma v) = f(uv)$.

Sei daher $f(\sigma) = x_1 \cdot \dots \cdot x_n$ mit $x_i \in \Sigma$.

Dann gilt für jedes x_i ($i = 1, \dots, n$)

$$\alpha_1(f(u_1)) \supseteq \dots \supseteq \alpha_1(f(u_r) \cdot x_1 \cdot \dots \cdot x_{i-1}) \supseteq \{x_i\} \subseteq$$

$$\subseteq \alpha_1(x_{i+1} \cdot \dots \cdot x_n \cdot f(v_\ell)) \subseteq \dots \subseteq \alpha_1(f(v_1))$$

also

$$(f(u\sigma v), f(uv)) \in \mu_{r, \ell} .$$

Für das Repräsentantensystem $C_{r,\ell}$ von $\mu_{r,\ell}$ gilt
 $C_{r,\ell} \subseteq A_r \sqcup B_\ell$, wobei A_r und B_ℓ die Repräsentantensysteme
 für ρ_r und λ_ℓ sind. ρ_r und λ_ℓ haben endlichen Index, also
 ist auch $C_{r,\ell}$ endlich. ///

Theorem 21:

Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(1) \quad \sim_k = \bigvee_{r+\ell=k} \mu_{r,\ell}$$

$$(2) \quad \sim_k \subseteq \bigvee_{r+\ell=k} (\rho_r \wedge \lambda_\ell)$$

$$(3) \quad \sim_k \subseteq \bigcap_{r+\ell=k+1} (\rho_r \vee \lambda_\ell) .$$

Beweis:

(1): Für " $\supseteq$ " genügt es, zu zeigen:

$$r+\ell = k \implies M_{r,\ell} \subseteq \sim_k .$$

Sei $(u\sigma v, uv) \in M_{r,\ell}$ und $w \leq u\sigma v$, $w \in \Sigma^{(k)}$ mit $k = r+\ell$.

O.B.d.A. kommt σ in w vor, das heißt,

$$w = u'\sigma v' \text{ mit } u' \leq u, v' \leq v.$$

Falls $u' \in \Sigma^{(r-1)}$, so ist wegen $u\sigma \sim_r u$ auch $u'\sigma \leq u$, also $u'\sigma v' \leq uv$.

Falls $u' \notin \Sigma^{(r-1)}$, dann ist $\sigma v' \in \Sigma^{(2)}$, also wegen $\sigma v \sim_l v$ auch $\sigma v' \leq v$ und damit $u'\sigma v' \leq uv$.

" $\Leftarrow$ ": Für $(a,b) \in \sim_k$ sei

$$t(a,b) = |u^{-1}a| + |u^{-1}b|,$$

wobei u das längste gemeinsame Anfangssegment von a und b ist.

Für $t(a,b) = 0$ ist $a = b$ und es ist nichts zu zeigen.

Sei $t(a,b) > 0$.

1. Fall: $a = u$, $b = uv$

$$u \sim_k uv \implies (u, uv) \in \rho_k \in \bigvee_{r+l=k} \mu_{r,l}$$

nach Lemma 3.

2. Fall: $a = uv$, $b = u$

wie im 1. Fall: $(a,b) \in \rho_k$.

3. Fall: $a = u\sigma v_1$, $b = u\tau v_2$ ($\sigma \neq \tau$).

Behauptung:

Es gilt:

$$(u\tau\sigma v_1, u\sigma v_1) \in \bigcup_{r+l=k} M_{r,l}$$

$$\text{oder} \quad (u\sigma\tau v_2, u\tau v_2) \in \bigcup_{r+l=k} M_{r,l}.$$

Beweis:

Es seien r_1 , r_2 , l_1 , l_2 maximal mit den Eigenschaften:

$$p_{r_1}(u\sigma) = p_{r_1}(u) \qquad s_{l_1}(\sigma\tau v_2) = s_{l_1}(\tau v_2)$$

$$p_{r_2}(u\tau) = p_{r_2}(u) \qquad s_{l_2}(\tau\sigma v_1) = s_{l_2}(\sigma v_1)$$

und u_1 , u_2 , w_1 , w_2 kritisch für $u\sigma$, $u\tau$, $\tau\sigma v_1$, $\sigma\tau v_2$.

Annahme:

$$r_1 + \ell_1 < k \text{ und } r_2 + \ell_2 < k .$$

$$\text{O.B.d.A. } \ell_1 \leq \ell_2 .$$

Da $w_2 \leq \tau v_2$, besitzt w_2 ein längstes Endsegment w' mit $w' \leq v_2$. Es gilt sogar $w_2 = w'$ oder $w_2 = \tau w'$.

Nun ist $u_2 \tau w' \leq u \tau v_2$ und

$$|u_2 \tau w'| \leq r_2 + 1 + \ell_1 \leq r_2 + 1 + \ell_2 \leq k .$$

Da $u \tau v_2 \sim_k u \sigma v_1$, ist

$$u_2 \tau w' \leq u \sigma v_1 .$$

$u_2 \tau \neq u$, also $\tau w' \leq \sigma v_1$ und wegen $\tau \neq \sigma$

$$\tau w' \leq v_1$$

also ist auch

$$w_2 \leq v_1$$

$$\implies u_1 \sigma w_2 \leq u \sigma v_1 \text{ und}$$

$$|u_1 \sigma w_2| = r_1 + 1 + l_1 \leq k ,$$

aber: $u_1 \sigma w_2 \not\leq u \tau v_2$ nach Konstruktion von u_1 und w_2
und wegen $\sigma \neq \tau$.

Das widerspricht aber $u \sigma v_1 \sim_k u \tau v_2$.

Sei etwa $r_2 + l_2 \geq k$. Dann ist $M_{r_2, l_2} \subseteq \bigcup_{r+l=k} M_{r, l}$,

also

$$(u \tau \sigma v_1, u \sigma v_1) \in M_{r_2, l_2} \subseteq \bigcup_{r+l=k} M_{r, l} .$$

Da $\bigvee_{r+l=k} \mu_{r, l} \leq \sim_k$, folgt wegen $(u \sigma v_1, u \tau v_2) \in \sim_k$

auch

$$(u \tau \sigma v_1, u \tau v_2) \in \sim_k .$$

Nun gilt

$$t(u \tau \sigma v_1, u \tau v_2) \leq t(u \sigma v_1, u \tau v_2) + 1 - 2 < t(a, b) .$$

Somit folgt mittels Induktion die Behauptung (1) .

(2): Nach Eigenschaft 15(3) ist

$$\mu_{r,l} \subseteq \rho_r \cap \lambda_l$$

und daher

$$\nu_k = \bigvee_{r+l=k} \mu_{r,l} \subseteq \bigvee_{r+l=k} \rho_r \cap \lambda_l$$

(3): Es sei $(u,v) \in \rho_r \cap \lambda_l$ ($r+l=k$). Dann ist $(u,v) \in \rho_r$,
also

$$\forall r' \leq r \quad (u,v) \in \rho_{r'}$$

und

$$\forall r' \leq r \quad (u,v) \in \rho_{r'} \vee \lambda_{k+1-r'}$$

Außerdem ist

$$\forall l' \leq l \quad (u,v) \in \lambda_{l'},$$

also

$$\forall l' \leq l \quad (u,v) \in \lambda_{l'} \vee \rho_{k+1-l'}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow (u,v) \in \bigcup_{r'+l'=k+1} \rho_{r'} \vee \lambda_{l'} \\ &\Rightarrow \bigvee_{r+l=k} \rho_r \wedge \lambda_l \in \bigcup_{r'+l'=k+1} \rho_{r'} \vee \lambda_{l'} , \end{aligned}$$

also :

$$\sim_k \subseteq \bigcup_{r+l=k+1} \rho_r \vee \lambda_l . \quad ///$$

Korollar 22:

$\sim_k$ ist die von der Menge

$$\begin{aligned} J_k := \bigcup_{r+l=k} M_{r,l} &= \{ (u\sigma v, uv) \mid u\sigma \sim_r u, \sigma v \sim_l v, u,v \in \Sigma^* , \\ &\quad \sigma \in \Sigma , r+l=k \} \end{aligned}$$

erzeugte Kongruenzrelation. ///

Korollar 23:

$\sim_k$ ist eine vollinvariante Kongruenzrelation mit endlichem Index. ///

Theorem 24:

$\pi \in \mathcal{E}(\Sigma^*)$ ist genau dann stückweise testbar, wenn

$$\Sigma^* / \underline{\pi} \in \underline{J} .$$

Beweis:

Es sei $\Sigma^* / \underline{\pi} \in \underline{J} = \underline{R} \cap \underline{L} .$

Nach Theorem 13 gibt es $r, l \in \mathbb{N}$ mit

$$\rho_r \subseteq \underline{\pi} , \quad \lambda_l \subseteq \underline{\pi} ,$$

also auch

$$\rho_r \vee \lambda_l \subseteq \underline{\pi} .$$

Nach Theorem 21 (3) folgt

$$\sim_{r+l-1} \subseteq \rho_r \vee \lambda_l \subseteq \underline{\pi} ,$$

also ist π stückweise $r+l-1$ -testbar.

Umgekehrt sei

$$\sim_k \subseteq \pi$$

Wegen $\rho_k \subseteq \sim_k$, $\lambda_k \subseteq \sim_k$ ist

$$\Sigma^*/_{\pi} \in \underline{R} \cap \underline{L} = \underline{J} . \quad ///$$

Theorem 21 ist eine Verschärfung eines Lemmas von I. SIMON.

Dadurch läßt sich der Beweis für die Charakterisierung

der γ -trivialen Monoide wesentlich vereinfachen. Die

Kongruenzrelationen $\mu_{r,l}$ sind auch für sich interessant.

In $\Sigma^*/_{\mu_{r,l}}$ gilt die Gleichung $(axb)^r x (yxz)^l = (axb)^r (yxz)^l$.

Die Frage, ob die $\mu_{k,k}$ ($k \geq 0$) die zu $\underline{R} \vee \underline{L}$ gehörige

E-Varietät erzeugen, ist noch nicht geklärt.

§ 5

Multiplikative Abgeschlossenheit

Definition 1:

Es sei M ein Monoid. Auf $\mathcal{E}(M)$ sei folgendermaßen eine Multiplikation erklärt:

Für $\rho, \sigma \in \mathcal{E}(M)$ sei

$$\begin{aligned} \rho \cdot \sigma &:= \{ (a, b) \in M \times M \mid \{ ([w_1]_\rho, [w_2]_\sigma) \mid w_1 w_2 = a \} = \\ &= \{ ([v_1]_\rho, [v_2]_\sigma) \mid v_1 v_2 = b \} \}. \end{aligned}$$

Lemma 2:

$$(i) \quad \rho, \sigma \in \mathcal{E}(M) \implies \rho \cdot \sigma \in \mathcal{E}(M)$$

$$(ii) \quad \rho, \sigma \in \mathcal{E}_{\text{fin}}(M) \implies \rho \cdot \sigma \in \mathcal{E}_{\text{fin}}(M).$$

Beweis:

$$(i) \quad \rho \cdot \sigma = \ker f \text{ mit}$$

$$f(a) = \{ ([w_1]_\rho, [w_2]_\sigma) \mid w_1 w_2 = a \}.$$

(ii) Sei n_ρ der Index von ρ über M . Der Index von $\rho \times \sigma$ ist $n_\rho \cdot n_\sigma$, also ist

$$|\operatorname{im} f| \leq 2^{n_\rho \cdot n_\sigma}. \quad ///$$

Lemma 3:

$\mathcal{E}(M)$ ist ein geordnetes Gruppoid.

Beweis:

Es sei $\rho, \sigma, \tau \in \mathcal{E}(M)$, $\sigma \subseteq \tau$.

Aus

$$\{([w_1]_\rho, [w_2]_\sigma) \mid w_1 w_2 = a\} = \{([v_1]_\rho, [v_2]_\sigma) \mid v_1 v_2 = b\}$$

folgt

$$\{([w_1]_\rho, [w_2]_\tau) \mid w_1 w_2 = a\} = \{([v_1]_\rho, [v_2]_\tau) \mid v_1 v_2 = b\},$$

also ist $\rho\sigma \subseteq \rho\tau$.

Analog erhält man $\sigma\rho \subseteq \tau\rho$. ///

Die wesentlichen Eigenschaften der Multiplikation ergeben sich aus dem folgenden fundamentalen Lemma.

Lemma 4:

Es seien $\rho, \sigma \in \mathcal{E}(M)$.

$\rho \cdot \sigma$ ist die größte Äquivalenzrelation, für die gilt:

(*) Das Komplexprodukt in M je einer ρ -Klasse mit je einer σ -Klasse ist Vereinigung von τ -Klassen, d.h. τ -saturiert.

Beweis:

1) $\rho \cdot \sigma$ hat die geforderte Eigenschaft, (*), denn

$$\forall a, b \in M \quad [a]_{\rho} \cdot [b]_{\sigma} = \bigcup_{\substack{(a,u) \in \rho \\ (b,v) \in \sigma}} [uv]_{\rho \cdot \sigma}$$

Die Inklusion $\subseteq$ ist offensichtlich.

Umgekehrt sei $x \in [uv]_{\rho \cdot \sigma}$. Dann gibt es $x_1, x_2 \in M$ mit $x = x_1 x_2$ und $(x_1, u) \in \rho$, $(x_2, v) \in \sigma$, also ist $x \in [a]_{\rho} \cdot [b]_{\sigma}$.

- 2) Sei τ eine weitere Äquivalenzrelation mit der geforderten Eigenschaft. Sei $(x, y) \in \tau$ und $(x, y) \notin \rho \cdot \sigma$. Dann gibt es o.B.d.A. eine Faktorisierung $x_1 x_2 = x$, für die gilt

$$(**) (x_1, y_1) \in \rho, (x_2, y_2) \in \sigma \longrightarrow y_1 y_2 \neq y.$$

Wie unter 1) ist

$$[x_1]_\rho \cdot [x_2]_\sigma \subseteq \bigcup_{\substack{(u, x_1) \in \rho \\ (u, x_2) \in \sigma}} [uv]_\tau$$

und wegen (*) ist sogar

$$[x_1]_\rho \cdot [x_2]_\sigma = \bigcup_{\substack{(u, x_1) \in \rho \\ (v, x_2) \in \sigma}} [uv]_\tau$$

Nun ist y ein Element der rechten Seite, aber wegen (**) $y \notin [x_1]_\rho \cdot [x_2]_\sigma$. ///

Folgerungen:

Es sei M ein Monoid, $\rho, \sigma \in \mathcal{C}(M)$.

$$1) \quad \rho \cdot \sigma = \bigcap_{u, v \in M} \pi[u]_\rho \cdot [v]_\sigma.$$

Beweis:

" $\subseteq$ ": Für $u, v \in M$ ist nach Lemma 4 $[u]_\rho \cdot [v]_\sigma$ Vereinigung von $\rho \cdot \sigma$ -Klassen, also

$$\rho \cdot \sigma \subseteq \pi[u]_\rho \cdot [v]_\sigma$$

" $\supseteq$ ": $\tau = \bigcup_{u, v \in M} \pi[u]_\rho \cdot [v]_\sigma$ ist eine Äquivalenzrelation, für die gilt: $[a]_\rho \cdot [b]_\sigma$ ist Vereinigung von τ -Klassen für beliebige $a, b \in M$.

Aus 1) folgt:

$$\begin{aligned} 2) \quad (a, b) \in \rho \cdot \sigma &\iff \\ \forall u, v \in M \quad a \in [u]_\rho \cdot [v]_\sigma &\iff b \in [u]_\rho \cdot [v]_\sigma. \end{aligned}$$

Aus 1) folgt:

3) Für $L_1, L_2 \in M$ gilt:

$$\pi_{L_1} \cdot \pi_{L_2} \subseteq \pi_{L_1} \cdot L_2 \quad .$$

Aus 2) folgt:

$$4) \quad [a]_{\rho} \cdot_{\sigma} = \bigcap_{a \in [u]_{\rho} \cdot [v]_{\sigma}} [u]_{\rho} \cdot [v]_{\sigma} \setminus \bigcup_{a \notin [u]_{\rho} \cdot [v]_{\sigma}} [u]_{\rho} \cdot [v]_{\sigma}$$

5) Aus 4) folgt: Für alle $u, v \in M$ ist

$$[uv]_{\rho} \cdot_{\sigma} \subseteq [u]_{\rho} \cdot [v]_{\sigma}.$$

Falls $\rho \in \mathcal{C}(M)$, so gilt sogar für $\rho^2 := \rho \cdot \rho$

$$[uv]_{\rho^2} \subseteq [u]_{\rho} \cdot [v]_{\rho} \subseteq [uv]_{\rho}, \text{ also } \rho^2 \subseteq \rho.$$

Theorem 5:

Es sei $\mathbb{F} = (\mathbb{F}_{\Sigma})_{\Sigma}$ eine E-Varietät. Dann sind äquivalent:

- a) Jedes $\mathbb{F}_{\Sigma}$ ist multiplikativ abgeschlossen.
- b) Die zu $\mathbb{F}$ gehörige *-Varietät (vgl. 2.8) ist multiplikativ abgeschlossen.

Beweis:

$\mathbb{F}_\Sigma$ sei multiplikativ abgeschlossen und $L_1, L_2 \in \mathcal{F}$, das heißt: $\pi_{L_1}, \pi_{L_2} \in \mathbb{F}$. Wegen $\pi_{L_1 \cdot L_2} \supseteq \pi_{L_1} \cdot \pi_{L_2}$ ist $L_1 \cdot L_2 \in \mathcal{F}$.

Umgekehrt sei $\mathcal{F}$ multiplikativ abgeschlossen, dann ist mit $L_1, L_2 \in \mathcal{F}$ auch $\pi_{L_1 \cdot L_2} \in \mathbb{F}$.

Seien $\rho, \sigma \in \mathbb{F}$; die Mengen $[a]_\rho, [a]_\sigma$ ($a \in \Sigma^*$) liegen dann in $\mathcal{F}$.

Jedes der $\pi_{[a]_\rho} \cdot [b]_\sigma$ ($a, b \in \Sigma^*$) liegt daher in $\mathbb{F}_\Sigma$, also auch ihr Durchschnitt

$$\rho \cdot \sigma = \bigcap_{a, b \in \Sigma^*} \pi_{[a]_\rho} \cdot [b]_\sigma$$

denn dieser ist endlich, weil ρ und σ endlichen Index haben. ///

Wir bezeichnen $\mathbb{F}$ als *multiplikativ abgeschlossen*, wenn jedes $\mathbb{F}_\Sigma$ multiplikativ abgeschlossen ist.

Theorem 6:

Eine E-Varietät $\mathbb{F}$ ist genau dann multiplikativ abgeschlossen, wenn für jedes $\rho \in \mathbb{F}$ auch $\rho^2 = \rho \cdot \rho \in \mathbb{F}$.

Beweis:

Es ist nur zu zeigen:

$$\forall \rho \in \mathbb{F} \quad \rho^2 \in \mathbb{F} \implies \forall \rho, \sigma \in \mathbb{F}_\Sigma \quad \rho \cdot \sigma \in \mathbb{F}_\Sigma.$$

Seien also $\rho, \sigma \in \mathbb{F}_\Sigma$. Dann ist $\tau := \rho \wedge \sigma \in \mathbb{F}_\Sigma$ und da $\mathbb{F}_\Sigma$ geordnetes Untergruppoid von $\mathcal{E}(\Sigma^*)$ ist, folgt aus $\tau \leq \rho$, $\tau \leq \sigma$

$$\sigma^2 \leq \rho \tau \leq \rho \sigma$$

also ist $\rho \sigma \in \mathbb{F}_\Sigma$.

Korollar 7:

Für jede E-Varietät $\mathbb{F}$ sind äquivalent:

a) $\mathbb{F}$ ist multiplikativ abgeschlossen,

b) $\rho \in \mathbb{F} \cap \mathcal{C}(\Sigma^*) \implies \rho^2 \in \mathbb{F}$

c) $\rho \in \mathbb{F} \cap \mathcal{V}(\Sigma^*) \implies \rho^2 \in \mathbb{F}$

Beweis:

Es ist nur (c) $\implies$ (a) zu beweisen:

Sei $\sigma \in \mathbb{F}$. Dann ist $\rho = \underline{g} \in \mathbb{F} \cap \mathcal{V}(\Sigma^*)$ und daher $\rho^2 \in \mathbb{F}$.

Wegen $\rho \leq \sigma$ gilt

$$\rho^2 \leq \sigma \rho \leq \sigma^2,$$

also $\sigma^2 \in \mathbb{F}$; also folgt a) aus dem Theorem.

///

Beispiele:

- 1) Die Klasse $\mathcal{J}$ aller erkennbaren Sprachen ist multiplikativ abgeschlossen:

Zu $\mathcal{J}$ gehört die E-Varietät

$$\mathbb{F} = \{ \pi \in \mathcal{C}(\Sigma^*) \mid \pi \in \mathcal{C}_{\text{fin}}(\Sigma^*) \} \}_{\Sigma \text{ endlich}}$$

Es gilt:

Lemma 8:

$$\rho \in \mathcal{C}(M) \implies \rho^2 \in \mathcal{C}(M) ,$$

Beweis:

Es sei $(a,b) \in \rho^2$, $c \in M$.

Es gilt: $(ac,bc) \in \rho^2$, denn

$$\begin{aligned}
 & \{ ([w_1]_\rho, [w_2]_\rho) \mid w_1 w_2 = ac \} = \\
 (*) & = \{ ([w_1]_\rho, [w_3 c]_\rho) \mid w_1 w_3 = a \} \cup \\
 & \cup \{ ([aw_1']_\rho, [w_2']_\rho) \mid w_1' w_2 = c \} = \\
 (**) & = \{ ([v_1]_\rho, [v_3 c]_\rho) \mid v_1 v_3 = b \} \cup \\
 & \cup \{ ([bw_1']_\rho, [w_2']_\rho) \mid w_1' w_2' = c \} = \\
 & = \{ ([v_1]_\rho, [v_2]_\rho) \mid v_1 v_2 = bc \} .
 \end{aligned}$$

Die Gleichheit zwischen (*) und (**) kommt einerseits daher, daß $\rho \in \mathcal{C}(\Sigma^*)$, also

$$(v_3, w_3) \in \rho \implies (v_3 c, w_3 c) \in \rho ,$$

andererseits daher, daß $\rho^2 \subseteq \rho$, also

$$(a, b) \in \rho^2 \implies (aw_1', bw_1') \in \rho .$$

Analog folgt:

$$(ca, cb) \in \rho^2 .$$

///

Nun folgt die multiplikative Abgeschlossenheit von $\mathbb{F}$,
denn $\pi \in \mathbb{F} \longrightarrow \underline{\pi} \in \mathbb{F} \longrightarrow (\underline{\pi})^2 \in \mathcal{C}_{\text{fin}}(\Sigma^*) \subseteq \mathbb{F}$.

Korollar 9:

Sind $\rho, \sigma \in \mathcal{C}(M)$ erkennbar, so ist auch $\rho \cdot \sigma$ erkennbar.

///

- 2) Die $*$ -Varietät aller aperiodischen Sprachen ist multiplikativ abgeschlossen:

Zu Ap gehört die E-Varietät $\mathbb{F}$, definiert durch

$$\mathbb{F}_{\Sigma} = \{ \pi \mid \underline{\pi} \in \mathcal{C}_{\text{fin}}(\Sigma^*) , \exists k \in \mathbb{N} \quad \eta_k \subseteq \underline{\pi} \} ,$$

wobei η_k die von $x^{k+1} = x^k$ für $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ erzeugte vollinvariante Kongruenzrelation auf Σ^* ist. Die Behauptung folgt aus

Lemma 10:

$$\eta_k \cdot \eta_l \supseteq \eta_{k+l+1} \quad (k, l \geq 0) .$$

Beweis:

Da η_{k+l+1} die von $\{ (u^{k+l+2}, u^{k+l+1}) \mid u \in \Sigma^* \}$ erzeugte Kongruenzrelation ist, genügt es, zu zeigen:

$$\forall u \in \Sigma^* \quad (u^{k+l+2}, u^{k+l+1}) \in \eta_k \cdot \eta_l,$$

das heißt,

$$\begin{aligned} A &:= \{ ([w_1]_{\eta_k}, [w_2]_{\eta_l}) \mid w_1 w_2 = u^{k+l+2} \} = \\ &= \{ ([v_1]_{\eta_k}, [v_2]_{\eta_l}) \mid v_1 v_2 = u^{k+l+1} \} =: B. \end{aligned}$$

Sei also $w_1 w_2 = u^{k+l+2}$, das heißt $w_1 = u^r u_1$, $w_2 = u_2 u^s$, mit $u_1 u_2 = u$, $r+s = k+l+1$. Sei etwa $s \leq l$.

Dann ist $r \geq k+1$ und es gilt

$$(u^r u_1, u^{r-1} u_1) \in \eta_k,$$

also gibt es eine Darstellung $u^{r-1} u_1 \cdot u_2 u^s = u^{k+l+1}$

mit $(u^r u_1, u^{r-1} u_1) \in \eta_k$

$$(u_2 u^s, u_2 u^s) \in \eta_l.$$

Den Fall $r \leq k$ kann man ebenso erledigen, also folgt $A \subseteq B$.

Die umgekehrte Inklusion folgt analog. Also ist das Lemma bewiesen. ///

Sind nun $\pi, \sigma \in \mathbb{F}$, so gilt $\pi \supseteq \eta_k$, $\sigma \supseteq \eta_\ell$ für gewisse $k, \ell \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, also nach Lemma 10

$$\pi \cdot \sigma \supseteq \eta_k \cdot \eta_\ell \supseteq \eta_{k+\ell+1}.$$

Also ist mit Korollar 9

$$\pi \cdot \sigma \in \mathbb{F}_\Sigma.$$

Theorem 11:

Es sei $\underline{G}$ die M -Varietät aller endlichen Gruppen und $\underline{G}'$ eine Untervarietät von $\underline{G}$. Dann ist die M -Varietät

$$\left(\begin{array}{c} M \\ \underline{G} \longrightarrow \underline{G}' \end{array} \right)$$

multiplikativ abgeschlossen.

Beweis:

Es sei $\mathbb{F}$ die zu $\left(\begin{array}{c} \underline{M} \\ \underline{G} \longrightarrow \underline{G}' \end{array} \right)$ gehörige E-Varietät und

$$\rho = \pi \in \mathbb{F} .$$

Um zu zeigen, daß jede Gruppe in $\Sigma^*/_{\rho^2}$ zu $\underline{G}'$ gehört, ist hinreichend:

Der natürliche Epimorphismus

$$\psi : \Sigma^*/_{\rho^2} \longrightarrow \Sigma^*/_{\rho}$$

ist injektiv auf den maximalen Gruppen in $\Sigma^*/_{\rho^2}$.

Jede maximale Untergruppe von $\Sigma^*/_{\rho^2}$ ist eindeutig bestimmt durch ihr Idempotentes $[x]_{\rho^2}$.

G_x bezeichne die zugehörige Gruppe.

$\psi|_{G_x}$ ist injektiv heißt:

$$(x^2, x) \in \rho^2 \wedge (x, y) \in \rho \wedge [y]_{\rho^2} \in G_x \implies (x, y) \in \rho^2 .$$

Wegen $(x^2, x) \in \rho^2$ ist auch $(x^2, x) \in \rho$.

Da $[Y]_{\rho^2} \in G_x$, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $(y^n, x) \in \rho^2$.

Sei nun $y = y_1 y_2$ gegeben. Dann ist $y^{\ell} y_1 y_2 y^r = y^n$ ($\ell + r = n - 1$)

und wegen $(y^n, x) \in \rho^2$ gibt es $x_1, x_2 \in \Sigma^*$ mit $x_1 x_2 = x$

und

$$(y^{\ell} y_1, x_1), (y_2 y^r, x_2) \in \rho.$$

Wegen $(x, y) \in \rho$ gilt auch $(y^2, y) \in \rho$, also ist $[y]_{\rho}$

das Einselement in der Bildgruppe $\psi(G_x)$.

Daher gilt $(y y_1, y_1), (y_2 y, y_2) \in \rho$ und es folgt

$$(y_1, x_1), (y_2, x_2) \in \rho.$$

Also gibt es für jede Darstellung $y_1 y_2 = y$ eine Darstellung $x_1 \cdot x_2 = x$ mit $(y_1, x_1) \in \rho$, $(y_2, x_2) \in \rho$.

Umgekehrt gibt es zu $x_1 \cdot x_2 = x$ eine Darstellung $y^r y_1 y_2 y^{\ell} = y^n$ mit $(y^r y_1, x_1) \in \rho$, $(y_2 y^{\ell}, x_2) \in \rho$ und wie oben folgt

$$(y_1, x_1), (y_2, x_2) \in \rho \text{ mit } y_1 y_2 = y.$$

Also insgesamt: $(x, y) \in \rho^2$.

///

Bemerkung 12:

Die maximalen Gruppen in $\Sigma^*/_{\rho} 2$ sind genau die maximalen Gruppen in $\Sigma^*/_{\rho}$, denn einerseits ist der kanonische Epimorphismus $\psi : \Sigma^*/_{\rho} 2 \twoheadrightarrow \Sigma^*/_{\rho}$ injektiv auf den Gruppen in $\Sigma^*/_{\rho} 2$, andererseits gibt es zu jeder Gruppe G in $\Sigma^*/_{\rho}$ eine Gruppe in $\Sigma^*/_{\rho} 2$, deren ψ -Bild G ist.

Bemerkung 13:

Alle bisherigen Definitionen und Aussagen dieses Paragraphen lassen sich mühelos auch für Halbgruppen statt Monoide formulieren und beweisen, wenn man für $\rho, \sigma \in \mathcal{C}(\Sigma^+)$ die Multiplikation folgendermaßen definiert:

$$\rho \cdot \sigma = \rho^1 \cdot \sigma^1 \setminus \{\Lambda, \Lambda\}.$$

Theorem 11 lautet dann:

Für jede G -Varietät $\underline{G}'$ ist

$$\left(\begin{array}{ccc} & \underline{S} & \\ \underline{G} & \dashrightarrow & \underline{G}' \end{array} \right)$$

multiplikativ abgeschlossen.

Zum Beweis wählt man zusätzlich den Repräsentanten x des Einselements von G_x minimal:

Wie im obigen Beweis erhält man zu jeder Zerlegung $y = y_1 y_2$ eine Zerlegung $x = x_1 x_2$ in Σ^+ mit $(y_1, x_1) \in \rho$, $(y_2, x_2) \in \rho$.

Für die Umkehrung benötigt man zu $x = x_1 x_2$ eine Darstellung $y = y_1 y_2$ in Σ^+ mit $(x_1, y_1) \in \rho$, $(x_2, y_2) \in \rho$, das heißt der Fall $(x_1, y^r) \in \rho$, $(x_2, y^l) \in \rho$ mit $r+l = n$ darf nicht auftreten. Er kann auch nicht auftreten: Wegen $(y_2, y) \in \rho$ würde nämlich folgen

$$(x_1, y) \in \rho, (x_2, y) \in \rho,$$

$$\text{also} \quad (x_1, x) \in \rho, (x_2, x) \in \rho$$

$$\implies (x_1^2, x_1) \in \rho, (x_2^2, x_2) \in \rho.$$

Da x ein minimaler Repräsentant des Einselements von G_x war, ergibt sich ein Widerspruch.

Öffene Frage:

Es sei eine Folge von Gleichungen $(u_i = v_i)_{i \in \mathbb{N}}$ gegeben und $((\rho_i)_{i \in \mathbb{N}})$ die zugehörigen vollinvarianten Kongruenzrelationen, $\mathbb{F}$ die zugehörige E-Varietät.

Was ist der multiplikative Abschluß $\hat{\mathbb{F}}$ von $\mathbb{F}$?

Beziehungsweise: Wie erhält man aus den ρ_i eine definierende Folge für $\hat{\mathbb{F}}$?

Es gilt nämlich i.a. nicht:

$$\sigma \subseteq f \circ \rho \circ f^{-1} \implies \sigma^2 \subseteq f \circ \rho^2 \circ f^{-1} !$$

Es gilt nur:

Lemma 14:

Ist $f : \Gamma^* \longrightarrow \Sigma^*$ ein Isomorphismus und $\rho \in \mathcal{C}(\Sigma^*)$, so ist

$$(f \circ \rho \circ f^{-1})^2 = f \circ \rho^2 \circ f^{-1} .$$

Beweis:

$$(f \circ \rho \circ f^{-1})^2 =$$

$$= \{ (u, v) \in \Gamma^* \times \Gamma^* \mid \{ ([f(u_1)]_\rho, [f(u_2)]_\rho) \mid u_1 u_2 = u \} = \\ \{ ([f(v_1)]_\rho, [f(v_2)]_\rho) \mid v_1 v_2 = v \} \}$$

$$f \circ \rho^2 \circ f^{-1} =$$

$$= \{ (u, v) \in \Gamma^* \times \Gamma^* \mid \{ ([x_1]_\rho, [x_2]_\rho) \mid x_1 x_2 = f(u) \} = \\ \{ ([y_1]_\rho, [y_2]_\rho) \mid y_1 y_2 = f(v) \} \}$$

" $\supseteq$ ": Sei nun $(u, v) \in f \circ \rho^2 \circ f^{-1}$

$$u = u_1 u_2 \implies f(u) = f(u_1) \cdot f(u_2)$$

und es gibt y_1, y_2 mit

$$f(v) = y_1 \cdot y_2, \quad \{f(u_1), y_1\} \in \rho, \\ \{f(u_2), y_2\} \in \rho.$$

Da f Isomorphie ist, gibt es v_1, v_2 mit $f(v_1) = y_1$,
 $f(v_2) = y_2$ und $v = v_1 v_2$; das heißt aber zusammen
mit der Umkehrung:

$$(u, v) \in (f \circ \rho \circ f^{-1})^2.$$

" $\subseteq$ ": Sei: $(u, v) \in (f \circ \rho \circ f^{-1})^2$ und $f(u) = x_1 x_2$.

Da f Isomorphie ist, gibt es

$$u_1 = f^{-1}(x_1) \text{ , } u_2 = f^{-1}(x_2) \text{ mit } u_1 u_2 = u \text{ .}$$

Also gibt es v_1, v_2 mit $v = v_1 v_2$ und

$$\{f(u_1), f(v_1)\} \in \rho \text{ , } \{f(u_2), f(v_2)\} \in \rho \text{ .}$$

Daher gilt für $y_1 = f(v_1)$, $y_2 = f(v_2)$: $y_1 y_2 = f(v)$

und $(x_1, y_1) \in \rho$, $(x_2, y_2) \in \rho$ und damit

$$(u, v) \in f \circ \rho^2 \circ f^{-1} \text{ .} \quad ///$$

$\rho \in \mathcal{C}(\Sigma^*)$ heiße charakteristisch, falls gilt:

$$\forall f \in \text{Aut}(\Sigma^*) \quad \rho \subseteq f \circ \rho \circ f^{-1} \text{ .}$$

Korollar 15:

Für jede charakteristische Kongruenzrelation ρ ist auch

ρ^2 charakteristisch.

Beweis:

Sei $f \in \text{Aut}(\Sigma^*)$. Wegen $\rho \subseteq f \circ \rho \circ f^{-1}$ ist auch $\rho^2 \subseteq (f \circ \rho \circ f^{-1})^2 = f \circ \rho^2 \circ f^{-1}$ nach Lemma. ///

Bekanntlich entspricht dem Konkatenationsprodukt von Teilmengen von Σ^* auf der Seite der Monoide das SCHÜTZEN-BERGER-Produkt $M_1 \diamond M_2$. Die unerwünschte Eigenschaft von $M_1 \diamond M_2$, daß man keine Darstellung $M_1 \diamond M_2 \cong \Sigma^*/\tau$ erhält, auch wenn $M_1 \cong \Sigma^*/\rho$, $M_2 \cong \Sigma^*/\sigma$ gegeben sind, läßt sich mit dem Produkt von Äquivalenzrelationen umgehen.

Die Einbettung $\mathcal{E}(\Sigma^+) \xrightarrow{\phi} \mathcal{E}(\Sigma^*)$, definiert durch $\phi(\rho) = \rho \cup \{\Lambda, \Lambda\}$ ist wegen $\phi(\rho \cdot \sigma) = \phi(\rho) \cdot \phi(\sigma)$ auch mit dem Produkt von Äquivalenzrelationen verträglich. Daher ergeben die Aussagen für M-Varietäten und ihre zugehörigen E-Varietäten durch Spezialisieren die entsprechenden Aussagen für S-Varietäten und ihre zugehörigen E-Varietäten.

Insbesondere ist für jedes 0-separierte $\rho \in \mathcal{V}(\Sigma^*)$

(d.h. $\rho = \{(\Lambda, \Lambda)\} \cup \rho'$ mit $\rho' \in \mathcal{E}(\Sigma^+)$) auch

$$\phi^{-1}(\rho) = \rho' \in \mathcal{V}(\Sigma^+) .$$

Darüber hinaus gibt es aber noch Elemente $\rho' \in \mathcal{V}(\Sigma^+)$,
die nicht auf diese Weise entstehen:

Zum Beispiel:

$$\Sigma = \{0, 1\}$$

$$\rho' = \{0, 1, \Sigma\Sigma^+\}$$

Dann ist $\rho' \in \mathcal{V}(\Sigma^+)$, aber $\phi(\rho') \notin \mathcal{V}(\Sigma^*)$.

§ 6

Ein Sonderfall

Für jedes endliche Alphabet Σ und $k \geq 0$ bezeichnet Σ^k die Menge $\Sigma \cdot \Sigma \cdot \dots \cdot \Sigma$ (k -mal) und $\Sigma^{(k)}$ die Menge $\bigcup_{0 < r \leq k} \Sigma^r$ der Wörter der Länge höchstens k .

Definition 1:

a) Für jedes Alphabet Σ bezeichne

$$\sigma_{0, \Sigma} = \Sigma^+ \times \Sigma^+$$

und für $k > 0$

$$\sigma_{k, \Sigma} = \{ (w, w) \mid w \in \Sigma^{(k)} \} \cup (\Sigma^k \Sigma^+ \times \Sigma^k \Sigma^+)$$

b) Eine Äquivalenzrelation $\rho \in \mathcal{E}(\Sigma^+)$ bzw. $\rho \in \mathcal{E}(\Sigma^*)$ heiße k -separiert, falls

$$\rho \subseteq \sigma_{k, \Sigma} \quad \text{bzw.} \quad \rho \subseteq \sigma_{k, \Sigma}^1.$$

Wenn das zugrundeliegende Alphabet feststeht, lassen wir den Index Σ weg.

Definition 2:

Eine Halbgruppe S mit 0 heißt *nilpotent*, falls eine natürliche Zahl n existiert mit $S^n = 0$.

Lemma 3:

- a) Die Klasse Nil aller endlichen nilpotenten Halbgruppen ist eine S -Varietät.
- b) $S \in \text{Nil} \iff$ es gibt ein $k > 0$, so daß in S die Gleichung $x_1 \dots x_k = y_1 \dots y_k$ gilt.

Beweis:

Es ist nur b) zu zeigen:

$S \in \text{Nil} \implies \exists k \quad S^k = 0 \implies$ in S gilt $x_1 \dots x_k = y_1 \dots y_k$.

Umgekehrt gelte in S die Gleichung $x_1 \dots x_k = y_1 \dots y_k$.

Dann gibt es ein Element $a \in S$ mit $S^k = a$

$$\begin{aligned} \implies \quad S \cdot a &= S \cdot S^k \subseteq S^k = a \\ a \cdot S &= S^k \cdot S \subseteq S^k = a \end{aligned}$$

also folgt

$$a = 0.$$

///

Lemma 4:

- a) Die $\sigma_{k,\Sigma}$ sind vollinvariante Kongruenzrelationen mit endlichem Index.
- b) Die $(\sigma_{k,\Sigma})_{k,\Sigma}$ erzeugen die zu Nil gehörige E-Varietät.

Beweis:

- a) $\sigma_{k,\Sigma}$ ist die von $x_1 \dots x_k = y_1 \dots y_k$ erzeugte vollinvariante Kongruenzrelation auf Σ^+ .

Wegen Lemma 3 b) folgt auch b) .

///

Lemma 5:

Für alle $k, l \in \mathbb{N}$ und beliebiges Σ gilt:

- a) $\sigma_{k,\Sigma} \circ \sigma_{l,\Sigma}$ ist $k+l$ -separiert,
- b) $\sigma_{k,\Sigma} \circ \sigma_{l,\Sigma}$ ist vollinvariant.

Beweis:

a) Es sei $(u, v) \in \sigma_{k, \Sigma} \cdot \sigma_{\ell, \Sigma}$ und $u \in \Sigma^{(k+\ell)}$.

Dann ist $u = u_1 u_2$ mit $u_1 \in \Sigma^{(k)}$, $u_2 \in \Sigma^{(\ell)}$.

Es gibt $v_1, v_2 \in \Sigma^+$ mit $v = v_1 v_2$ und $(u_1, v_1) \in \sigma_{k, \Sigma}$,

$(u_2, v_2) \in \sigma_{\ell, \Sigma}$. Dann folgt $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$,

also $u = v$.

b) Es gilt: $(u, v) \in \sigma_k \cdot \sigma_\ell \iff u = v$ oder $u, v \in \Sigma^{k+\ell} \Sigma^+$

und $u = u_1 u' u_2$, $v = u_1 v' u_2$ mit $u_1 \in \Sigma^k$, $u_2 \in \Sigma^\ell$.

Sei also $(u, v) \in \sigma_k \cdot \sigma_\ell$ und $f \in \text{End } \Sigma^+$,

$u = v \implies f(u) = f(v)$.

$u = u_1 u' u_2$, $v = u_1 v' u_2 \implies f(u) = f(u_1) f(u') f(u_2)$,

$f(v) = f(u_1) f(v') f(u_2)$.

Da $f \in \text{End } \Sigma^+$, sind $f(u)$ und $f(v)$ wieder von der

Form $f(u) = u_1' \cdot u'' \cdot u_2'$, $f(v) = u_1' \cdot v'' \cdot u_2'$

mit $u_1' \in \Sigma^k$, $u_2' \in \Sigma^\ell$.

Daher ist $\{f(u), f(v)\} \in \sigma_k \cdot \sigma_\ell$.

///

Das Lemma gilt auch für $k = 0$ oder $\ell = 0$. Bei festem ℓ definiert also das System

$$(\sigma_{k,\ell} \cdot \sigma_{\ell,\ell})_{k,\ell}$$

und das System $(\sigma_{\ell,\ell} \cdot \sigma_{k,\ell})_{k,\ell}$ jeweils eine E-Varietät ${}_k\mathbb{K}$ und ${}_k\mathbb{K}^r$. ${}_0\mathbb{K}$ wird meist mit $\mathbb{K}$, ${}_0\mathbb{K}^r$ mit $\mathbb{K}^r$ bezeichnet.

Lemma 6:

Es sei S eine (endliche, nichtleere) Halbgruppe und $E(S)$ die Menge der Idempotenten von S .

Dann gilt für jedes $n \geq |S|$:

$$S^n = S \cdot E(S) \cdot S.$$

Beweis:

Es sei u ein Wort über der Menge S mit der Länge:

$|u| \geq |S|$. $f : S^+ \rightarrow S$ sei die Fortsetzung der identischen Abbildung $S \rightarrow S$. Wir identifizieren u und $f(u)$ und betrachten die Anfangssegmente u_i der Länge i von u .

Falls alle u_i verschiedene Elemente von S darstellen, so gibt es ein i so, daß u_i idempotent ist, also $u_i = e \in S$.

Falls $u_i = u_j$ für $i < j$, so ist $u_j = u_i \cdot v$, also
 $u_i = u_i v^k$ für jedes $k \geq 0$.

Für ein gewisses k ist aber $v^k \in E(S)$, also $v^k = e$. In
 jedem Fall gilt $u_i \cdot e = u_i$, also

$$u = u_i \cdot v_i = u_i \cdot e \cdot v_i \in S \cdot E(S) \cdot S. \quad ///$$

Lemma 7:

$$\mathbb{K} = F(\underline{\mathbb{K}}), \quad \mathbb{K}^r = F(\underline{\mathbb{K}}^r).$$

Beweis:

Es sei $\rho \in \mathcal{C}_{\text{fin}}(\Sigma^+)$ mit $\sigma_k \cdot \sigma_0 \subseteq \rho$.

Dann ist $(x_1 \dots x_k x_{k+1}^y, x_1 \dots x_{k+1}) \in \sigma_k \cdot \sigma_0 \subseteq \rho$

$\implies$ in $\Sigma^*/_\rho$ gilt $x^{k+1}y = x^{k+1}$. Nach Theorem 3.15 und

Beispiel 3.14 folgt $\Sigma^*/_\rho \in \underline{\mathbb{K}}$, also $\mathbb{K} \subseteq F(\underline{\mathbb{K}})$.

Umgekehrt sei $\rho \in F(\underline{\mathbb{K}})$, das heißt $\Sigma^*/_\rho \in \underline{\mathbb{K}}$ und k der
 Index von $\underline{\rho}$.

Wir zeigen:

$$\sigma_k \cdot \sigma_0 \subseteq \underline{\rho}.$$

Sei nämlich $(u,v) \in \sigma_k \cdot \sigma_0$ mit $u \neq v$.

Dann sind $u,v \in \Sigma^k \Sigma^+$, also $u = u_1 \dots u_k y$, $v = u_1 \dots u_k t$
mit $u_1, \dots, u_k \in \Sigma$, $y, t \in \Sigma^+$ und mit Lemma 6 folgt,
wobei $\bar{u} = [u]_0$:

$$\bar{u} = \bar{u}_1 \dots \bar{u}_k \bar{y} = a e b \bar{y} = a e \text{ für geeignete } a, b, e \in \Sigma^* / \underline{\rho}, \\ e^2 = e, \text{ denn } e b \bar{y} = e.$$

Ebenso ist

$$\bar{v} = \bar{u}_1 \dots \bar{u}_k \bar{t} = a e b \bar{t} = a e,$$

$$\text{also} \quad (u,v) \in \underline{\rho}.$$

Die andere Aussage folgt analog.

///

Lemma 8:

$F(\underline{LI})$ ist die durch $\{\sigma_{k,\Sigma}^2\}_{k,\Sigma}$ definierte E-Varietät.

Beweis:

Es sei $\rho \in \mathcal{C}_{\text{fin}}(\Sigma^+)$ mit $\sigma_k^2 \in \rho$. Dann ist

$$(x_1 \dots x_{k+1} \ y \ z_1 \dots z_{k+1}, \ x_1 \dots x_{k+1} \ z_1 \dots z_{k+1}) \in \sigma_k^2, \\ \text{also auch} \in \rho.$$

$\implies$ in Σ^*/ρ gilt $x^{k+1} y x^{k+1} = (x^{k+1})^2$. Dann folgt
 $x^{\overline{k+1}} y x^{\overline{k+1}} = x^{\overline{k+1}}$ für alle genügend großen k . Nach
 Korollar 3.16 folgt

$$\Sigma^*/\rho \in \left(\begin{array}{c} \underline{S} \\ \underline{M} \longrightarrow \underline{I} \end{array} \right) = \underline{LI}.$$

Umgekehrt sei $\rho \in F(\underline{LI})$, das heißt, $S := \Sigma^*/\rho \in \underline{LI}$.

Für $k = |S|$ gilt dann: $\sigma_k^2 \subseteq \rho$.

In der Tat: Sei $(u,v) \in \sigma_k^2$, $u \neq v$, das heißt,
 $u = u_1 \dots u_k y v_1 \dots v_k$, $v = u_1 \dots u_k t v_1 \dots v_k$ mit
 $u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_k \in \Sigma$, $y, t \in \Sigma^+$.
 Für $\bar{u} = [u]_\rho$ und mit Lemma 6 gibt es $a, b, x, z \in S$,
 $e, f \in E(S)$ mit $\bar{u} = aeb\bar{y}xfz$, $\bar{v} = aeb\bar{t}xfz$.

Wegen $eSf = efeSf \subseteq efSf = ef$ folgt: $\bar{u} = aefz = \bar{v}$,
 also $(u,v) \in \rho$. ///

Theorem 9:

(a) Für alle $\ell, m \geq 0$ gilt:

$$\ell \text{ IK } \vee \text{ m IK }^r = F(\underline{LI})$$

(b)
$$\underline{K} \vee \underline{K}^r = \underline{LI}$$

Beweis:

(a) Es sei $\rho \in {}_\ell \mathbb{K}$, $\tau \in {}_m \mathbb{K}^r$, das heißt, es existieren k_1, k_2 mit

$$\sigma_{k_1} \circ \sigma_\ell \subseteq \rho, \quad \sigma_m \circ \sigma_{k_2} \subseteq \tau.$$

Sei $k := \max(k_1, k_2, \ell, m)$.

Dann ist

$$\sigma_k^2 \subseteq (\sigma_{k_1} \circ \sigma_\ell) \cap (\sigma_m \circ \sigma_{k_2}) \subseteq \rho \cap \tau.$$

Nach Lemma 8 heißt das: $\rho \cap \tau \in F(\underline{LI})$.

Nun sei $\rho \in F(\underline{LI})$, das heißt,

$$\sigma_k^2 \subseteq \rho \quad \text{für ein } k \geq 0.$$

Falls $\ell \geq k$: $\sigma_\ell \circ \sigma_\ell \subseteq \sigma_k^2 \subseteq \rho$, also $\rho \in {}_\ell \mathbb{K}$.

Falls $m \geq k$: $\sigma_m \circ \sigma_m \subseteq \sigma_k^2 \subseteq \rho$, also $\rho \in {}_m \mathbb{K}^r$.

Falls $\ell < k$ und $m < k$:

$$\begin{aligned} \text{Sei} \quad k_1 &:= 2k - \ell \\ k_2 &:= 2k - m . \end{aligned}$$

Dann gilt: $k_1, k_2 \geq k$

und wegen

$$\sigma_{k_1} \cdot \sigma_\ell \subseteq \sigma_{k_1 + \ell} = \sigma_{2k}$$

$$\sigma_m \cdot \sigma_{k_2} \subseteq \sigma_{m+k_2} = \sigma_{2k}$$

folgt für $(u, v) \in \sigma_{k_1} \cdot \sigma_\ell \cap \sigma_m \cdot \sigma_{k_2}$ mit $u \neq v$:

$$u = u_1 u' u_2 = v_1 u'' v_2$$

$$v = u_1 v' u_2 = v_1 v'' v_2$$

wobei

$$u_1 \in \Sigma^{k_1}, \quad u_2 \in \Sigma^\ell$$

$$v_1 \in \Sigma^m, \quad v_2 \in \Sigma^{k_2}$$

$$u', v', u'', v'' \in \Sigma^+ .$$

Dann besitzen u und v dasselbe Anfangssegment der Länge k und dasselbe Endsegment der Länge k , das heißt, $(u,v) \in \sigma_k^2$.

Also ist

$$\sigma_{k_1} \circ \sigma_l \cap \sigma_m \circ \sigma_{k_2} \subseteq \sigma_k^2 \subseteq \rho$$

und daher

$$\rho \in {}_l\mathbb{K} \vee {}_m\mathbb{K}^r.$$

(b) Setze in (a) $l = m = 0$.

///

Korollar 10:

$$\bigvee_{l \geq 0} {}_l\mathbb{K} = \bigvee_{m \geq 0} {}_m\mathbb{K}^r = F(\underline{LI}).$$

///

§ 7

Der Fall $\rho^2 = \rho$.

Der Fall $\rho^2 = \rho$ ist aus folgendem Grunde interessant:

Ist $\rho \in \mathcal{C}(\Sigma^*)$ mit $\rho^2 = \rho$, so bildet die Familie

$F = \{\tau \in \mathcal{C}_{\text{fin}}(\Sigma^*) \mid \tau \supseteq \rho\}$ einen multiplikativ abgeschlossenen Filter, denn

$$\rho \subseteq \pi \implies \rho = \rho^2 \subseteq \pi^2, \text{ also } \pi^2 \in F.$$

Lemma 1:

Es sei M ein Monoid. Für $\rho \in \mathcal{C}(M)$ sind äquivalent:

$$(1) \quad \forall u, v \in M \quad [uv]_\rho \subseteq [u]_\rho \cdot [v]_\rho$$

$$(2) \quad \rho \subseteq \rho^2.$$

$$(3) \quad (uv, w) \in \rho \implies \exists x, y \in M, xy = w, (u, x) \in \rho, (v, y) \in \rho.$$

Beweis:

Aus 1) folgt:

$$[u]_{\rho} \cdot [v]_{\rho} = \bigcup_{\substack{(a,u) \in \rho \\ (b,v) \in \rho}} [ab]_{\rho} ,$$

also ist $\rho \subseteq \rho^2$.

Sei $\rho \subseteq \rho^2$: Dann ist $[u]_{\rho} \cdot [v]_{\rho}$ Vereinigung von ρ -Klassen,
und da $u \cdot v \in [u]_{\rho} \cdot [v]_{\rho}$, ist

$$[uv]_{\rho} \subseteq [u]_{\rho} \cdot [v]_{\rho} .$$

3) ist nur Umformulierung von 1) .

///

Korollar 2:

Für $\rho \in \mathcal{C}(M)$ sind 1) bzw. 3) im obigen Lemma äquivalent
mit:

$$2') \quad \rho = \rho^2 .$$

Beweis:

Für $\rho \in \mathcal{C}(M)$ gilt stets $\rho^2 \subseteq \rho$, also $1) \implies 2')$.

$$\begin{aligned} 2') \implies 1) : [a]_{\rho} \cdot [b]_{\rho} &= \bigcup_{\substack{(a,u) \in \rho \\ (b,v) \in \rho}} [uv]_{\rho}^2 = \\ &= \bigcup_{\substack{(a,u) \in \rho \\ (b,v) \in \rho}} [uv]_{\rho} = [ab]_{\rho}, \end{aligned}$$

denn $(a,u) \in \rho$, $(b,v) \in \rho \implies [uv]_{\rho} = [ab]_{\rho}$.

Beispiele:

1) Es sei G eine Gruppe und $\rho \in \mathcal{C}(G)$. Dann ist $\rho^2 = \rho$:

ρ ist charakterisiert durch seinen Normalteiler N in G ,

$$[u]_{\rho} = u \cdot N.$$

In G gilt

$$[u]_{\rho} \cdot [v]_{\rho} = u \cdot N \cdot v \cdot N = u \cdot v \cdot N = [uv]_{\rho}.$$

Nach Korollar ist also $\rho^2 = \rho$.

Man beachte, daß $\cdot$ die Komplexmultiplikation für Teilmengen von G ist.

2) Es sei $F(\Sigma)$ die freie von Σ erzeugte Gruppe.

Als Monoid hat $F(\Sigma)$ die Präsentation

$$(\Sigma \cup \Sigma' ; \{ss' = \Lambda, s's = \Lambda \mid s \in \Sigma\}) \text{ wobei } \Sigma' = \{s' \mid s \in \Sigma\} .$$

$F(\Sigma) \cong (\Sigma \cup \Sigma')^* / \rho$, wo ρ die von $\{(ss', \Lambda), (s's, \Lambda)\}$ auf $(\Sigma \cup \Sigma')^*$ erzeugte Kongruenzrelation ist.

Sei $a = s_1 \in \Sigma$, $b = s'_1$, $w = \Lambda$.

Es gilt $(ab, w) \in \rho$, aber es gibt keine Wörter

$x, y \in (\Sigma \cup \Sigma')^*$ mit $x \cdot y = w$ und $(a, x) \in \rho$, $(b, y) \in \rho$.

Daher ist $\rho^2 \not\subseteq \rho$.

$$3) \quad \eta_k^2 \not\subseteq \eta_k ,$$

denn es gilt $(x^{k+1}, x^k) \in \eta_k$ und für alle Zerlegungen $x^{k+1} = x^r x^s$ und alle Zerlegungen $x^k = x^a x^b$ gilt:

$$(x^r, x^a) \notin \eta_k \text{ oder } (x^s, x^b) \notin \eta_k ,$$

falls $a \cdot b \cdot r \cdot s \neq 0$.

Theorem 3:

Es sei $\rho \in \mathcal{C}_{\text{fin}}(\Sigma^*)$. $\rho^2 = \rho \iff \rho = \Sigma^* \times \Sigma^*$.

Beweis:

Es sei $\rho^2 = \rho$. Da $\rho \in \mathcal{C}_{\text{fin}}(\Sigma^*)$, gibt es in der Folge $w, w^2, w^3, \dots$ ein w^k mit $(w^{2k}, w^k) \in \rho$.

$$\implies \exists x, y \in \Sigma^* \quad xy = w^k$$

und $(w^k, x) \in \rho$, $(w^k, y) \in \rho$.

1. Fall: $x = \Lambda$ oder $y = \Lambda$.

Dann ist $(w^k, \Lambda) \in \rho$ und mit Lemma 1 (3) folgt

$(w, \Lambda) \in \rho$.

2. Fall: $x \neq \Lambda$ und $y \neq \Lambda$.

Wegen $(w^{2k}, w^k) \in \rho$ und $(w^k, x) \in \rho$ ist auch

$(x^2, x) \in \rho$. Da $|x| < |w^k|$, folgt per Induktion

und mit Transitivität:

$$(w^k, \Lambda) \in \rho$$

und mit Lemma 1 (3) erhält man wieder

$$(w, \Lambda) \in \rho .$$

Also ist $\forall w \in \Sigma^* (w, \Lambda) \in \rho$, das heißt,

$$\rho = \Sigma^* \times \Sigma^* .$$

Die Umkehrung ist trivial.

///

Bemerkung 4:

In Theorem 3 kann man nicht auf die Endlichkeit von ρ verzichten:

Für $w \in \Sigma^*$ sei $l(w)$ die Länge von w , $\rho = \ker l$.
 Dann ist $l(uv) = l(u) + l(v)$, also $\rho \in \mathcal{C}(\Sigma^*)$.
 Es ist $\rho^2 = \rho$, denn $[u]_\rho \cdot [v]_\rho = [uv]_\rho$, aber
 $\Sigma^* /_\rho = \mathbb{N}$.

Korollar 5:

$$\rho \in \mathcal{C}_{\text{fin}}(\Sigma^+) \implies \rho^2 \subsetneq \rho .$$

///

§ 8

Shuffle-Produkt

Definition 1:

Für $\rho, \sigma \in \mathcal{E}(M)$, M ein Monoid, sei

$$\begin{aligned} \rho \sqcup \sigma &:= \{ (u, v) \in M \times M \mid \{ [u_1]_\rho, [u_2]_\sigma \} \mid u \in u_1 \sqcup u_2 \} = \\ &= \{ \{ [v_1]_\rho, [v_2]_\sigma \} \mid v \in v_1 \sqcup v_2 \}. \end{aligned}$$

Eigenschaften:

$$1) \quad \rho \sqcup \sigma \in \mathcal{E}(M)$$

$$2) \quad \rho, \sigma \in \mathcal{E}_{\text{fin}}(M) \implies \rho \sqcup \sigma \in \mathcal{E}_{\text{fin}}(M).$$

$$3) \quad \rho, \sigma \in \mathcal{E}(M) \implies \rho \sqcup \sigma = \sigma \sqcup \rho$$

$$4) \quad \rho, \sigma, \tau \in \mathcal{E}(M), \rho \subseteq \sigma \implies \rho \sqcup \tau \subseteq \sigma \sqcup \tau$$

$$\tau \sqcup \rho \subseteq \tau \sqcup \sigma$$

denn falls gilt

$$\{ [u_1]_\rho, [u_2]_\tau \} \mid u \in u_1 \sqcup u_2 \} = \{ [v_1]_\rho, [v_2]_\tau \} \mid v \in v_1 \sqcup v_2 \}$$

so gilt erst recht

$$\{([u_1]_\sigma, [u_2]_\tau) \mid u \in u_1 \sqcup u_2\} = \{([v_1]_\sigma, [v_2]_\tau) \mid v \in v_1 \sqcup v_2\}.$$

Lemma 2:

Es seien $\rho, \sigma \in \mathcal{E}(M)$. $\rho \sqcup \sigma$ ist die größte Äquivalenz-Relation τ , für die gilt:

- (*) Das Shuffle-Produkt in M je einer ρ -Klasse mit je einer σ -Klasse ist τ -saturiert.

Beweis:

1) Es gilt

$$\forall a, b \in M \quad [a]_\rho \sqcup [b]_\sigma = \bigcup_{\substack{(a, u) \in \rho \\ (b, v) \in \sigma}} [u \sqcup v]_{\rho \sqcup \sigma}$$

⊆ ist trivial.

Sei $x \in [u \sqcup v]_{\rho \sqcup \sigma}$. Es gibt $u' \in [u]_\rho$, $v' \in [v]_\sigma$ mit $x \in u' \sqcup v'$.

Daher ist $x \in [u]_\rho \sqcup [v]_\sigma = [a]_\rho \sqcup [b]_\sigma$.

2) Sei $\tau \in \mathcal{E}(\Sigma^*)$ mit (*) .

Ist $(x, y) \in \tau$ mit $(x, y) \notin \rho \sqcup \sigma$, so gibt es $x_1, x_2 \in \Sigma^*$
mit

$$x \in x_1 \sqcup x_2$$

$$y_1 \in [x_1]_\rho, y_2 \in [x_2]_\sigma \quad y \notin y_1 \sqcup y_2 .$$

Nun gilt wie unter 1)

$$[x_1]_\rho \sqcup [x_2]_\sigma \subseteq \bigcup_{\substack{(u, x_1) \in \rho \\ (u, x_2) \in \sigma}} [u \sqcup v]_\tau$$

und wegen (*) sogar Gleichheit.

Nun ist aber y ein Element der rechten Seite, aber nicht
der linken Seite,

also ist $\tau \subseteq \rho \sqcup \sigma$.

///

Folgerungen 3:

Es seien $\rho, \sigma \in \mathcal{E}(M)$.

$$1) \quad \rho \sqcup \sigma = \bigcup_{u,v \in M} \pi[u]_{\rho} \sqcup [v]_{\sigma} ,$$

das heißt,

$$(a,b) \in \rho \sqcup \sigma \iff (\forall u,v \in M \ a \in [u]_{\rho} \sqcup [v]_{\sigma} \iff$$

$$b \in [u]_{\rho} \sqcup [v]_{\sigma})$$

2) Für $L_1, L_2 \subseteq M$ gilt

$$\pi_{L_1} \sqcup \pi_{L_2} \subseteq \pi_{L_1 \sqcup L_2} .$$

3) Für $a \in M$ ist

$$[a]_{\rho \sqcup \sigma} = \bigcup_{a \in [u]_{\rho} \sqcup [v]_{\sigma}} [u]_{\rho} \sqcup [v]_{\sigma} \setminus$$

$$\setminus \bigcup_{a \notin [u]_{\rho} \sqcup [v]_{\sigma}} [u]_{\rho} \sqcup [v]_{\sigma}$$

Theorem 4:

Es sei $\mathcal{L}$ eine $*$ -Varietät und $\mathbb{F}$ die zugehörige E-Varietät.

Dann sind äquivalent:

$$1) \quad L_1, L_2 \in \mathcal{L} \implies L_1 \sqcup L_2 \in \mathcal{L}$$

$$2) \quad \rho, \sigma \in \mathbb{F}_\Sigma \implies \rho \sqcup \sigma \in \mathbb{F}_\Sigma \text{ für jedes endliche Alphabet.}$$

Beweis:

$$1) \implies 2): \text{ Seien } \rho, \sigma \in \mathbb{F}_\Sigma.$$

$$\rho \sqcup \sigma = \bigcup_{u, v \in \Sigma^*} \pi[u]_\rho \sqcup \pi[v]_\sigma; \text{ da } \rho \text{ und } \sigma \text{ endlichen Index haben, ist der Durchschnitt endlich und es folgt } \rho \sqcup \sigma \in \mathbb{F}_\Sigma.$$

$$2) \implies 1): \text{ Seien } L_1, L_2 \in \mathcal{L} : \text{ Es gibt ein endliches Alphabet } \Sigma \text{ mit } L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*. \text{ Nun gilt:}$$

$$\pi_{L_1} \sqcup \pi_{L_2} \subseteq \pi_{L_1 \sqcup L_2}$$

$$\text{also ist } L_1 \sqcup L_2 \in \mathcal{L} :$$

///

Korollar 5:

Es sind äquivalent:

$$1) \quad \rho, \sigma \in \mathbb{F}_{\Sigma} \implies \rho \sqcup \sigma \in \mathbb{F}_{\Sigma}$$

$$2) \quad \rho \in \mathbb{F}_{\Sigma} \implies \rho \sqcup \rho \in \mathbb{F}_{\Sigma}$$

$$3) \quad \rho \in \mathbb{F}_{\Sigma} \cap \mathcal{C}(\Sigma^*) \implies \rho \sqcup \rho \in \mathbb{F}_{\Sigma}$$

$$4) \quad \rho \in \mathbb{F}_{\Sigma} \cap \mathcal{V}(\Sigma^*) \implies \rho \sqcup \rho \in \mathbb{F}_{\Sigma}$$

Beweis:

Es ist nur $4) \implies 1)$ zu zeigen.

Seien $\rho, \sigma \in \mathbb{F}_{\Sigma} \implies \tau := \underbrace{\rho \cap \sigma}_{\in \mathbb{F}_{\Sigma}} \in \mathbb{F}_{\Sigma} \cap \mathcal{V}(\Sigma^*) \implies \tau \sqcup \tau \in \mathbb{F}_{\Sigma}$.

Wegen $\tau \sqcup \tau \subseteq \rho \sqcup \tau \subseteq \rho \sqcup \sigma$ folgt $\rho \sqcup \sigma \in \mathbb{F}_{\Sigma}$. ///

Beispiel:

Die *-Varietät aller rationalen Sprachen ist abgeschlossen unter $\sqcup$:

Seien L_1, L_2 rationale Sprachen $\in \Sigma^*$.

Die Frage, ob $\pi_{L_1} \sqcup \pi_{L_2}$ endlichen Index hat, beantwortet das

Lemma 6:

Es seien $\rho, \sigma \in \mathcal{C}(\Sigma^*)$. Dann ist auch

$$\rho \sqcup \sigma \in \mathcal{C}(\Sigma^*) .$$

Beweis:

Es sei $(u, v) \in \rho \sqcup \sigma$ und $x \in \Sigma$.

Dann ist

$$\begin{aligned} & \{([a]_\rho, [b]_\sigma) \mid ux \in a \sqcup b\} = \\ & = \{([u_1x]_\rho, [u_2]_\sigma \mid u \in u_1 \sqcup u_2\} \cup \{([u_1]_\rho, [u_2x]_\sigma) \mid u \in u_1 \sqcup u_2\} . \end{aligned}$$

Da $\rho, \sigma \in \mathcal{C}(\Sigma^*)$, gilt

$$[u_1]_\rho = [v_1]_\rho \implies [u_1x]_\rho = [v_1x]_\rho \text{ für alle } x \in \Sigma .$$

Also ist obige Vereinigungsmenge gleich

$$\begin{aligned} & \{ ([v_1 x]_\rho, [v_2]_\sigma) \mid v \in v_1 \sqcup v_2 \} \cup \{ ([v_1]_\rho, [v_2 x]_\sigma) \mid v \in v_1 \sqcup v_2 \} \\ &= \{ ([a']_\rho, [b']_\sigma) \mid vx \in a' \sqcup b' \} \end{aligned}$$

und daher folgt

$$(ux, vx) \in \rho \sqcup \sigma .$$

Der Rest folgt analog.

///

Nun gilt:

$$\underline{\pi_{L_1}} , \underline{\pi_{L_2}} \in \mathcal{C}_{fin}(\Sigma^*) ,$$

also ist nach obigem Lemma

$$\underline{\pi_{L_1} \sqcup \pi_{L_2}} \in \mathcal{C}_{fin}(\Sigma^*) .$$

Da

$$\underline{\pi_{L_1} \sqcup \pi_{L_2}} \subseteq \pi_{L_1} \sqcup \pi_{L_2} ,$$

ist auch

$$\underline{\pi_{L_1} \sqcup \pi_{L_2}} \subseteq \underline{\pi_{L_1} \sqcup \pi_{L_2}} ,$$

also

$$\pi_{L_1} \sqcup \pi_{L_2}$$

erkennbar.

Bemerkung 7:

$\mathcal{C}(\Sigma^*)$ und $\mathcal{C}_{\text{fin}}(\Sigma^*)$ sind selbst schon ω -abgeschlossen.

Lemma 8:

Es sei $\rho \in \mathcal{C}(\Sigma^*)$ und $f : \Gamma^* \longrightarrow \Sigma^*$ eine Isomorphie.

Dann ist

$$f \circ (\rho \sqcup \rho) \circ f^{-1} = (f \circ \rho \circ f^{-1}) \sqcup (f \circ \rho \circ f^{-1}) .$$

Beweis:

$$\begin{aligned} f \circ (\rho \sqcup \rho) \circ f^{-1} &= \{ (u, v) \mid \{ ([x_1]_\rho, [x_2]_\rho) \mid f(u) \in x_1 \sqcup x_2 \} = \\ &= \{ ([y_1]_\rho, [y_2]_\rho) \mid f(v) \in y_1 \sqcup y_2 \} \} \end{aligned}$$

$$(f \circ \rho \circ f^{-1}) \sqcup (f \circ \rho \circ f^{-1}) =$$

$$= \{ (u, v) \mid \{ [f(u_1)]_\rho, [f(u_2)]_\rho \} \mid u \in u_1 \sqcup u_2 \} =$$

$$= \{ ([f(v_1)]_\rho, [f(v_2)]_\rho) \mid v \in v_1 \sqcup v_2 \}.$$

Sei nun $(u, v) \in f \circ (\rho \sqcup \rho) \circ f^{-1}$ und $u \in u_1 \sqcup u_2$.

Dann ist für jeden Homomorphismus f

$$f(u) \in f(u_1) \sqcup f(u_2),$$

also gibt es y_1, y_2 mit

$$f(v) \in y_1 \sqcup y_2 \text{ und } (f(u_1), y_1) \in \rho, (f(u_2), y_2) \in \rho.$$

Da f Isomorphie ist, gibt es

$$v_1 = f^{-1}(y_1), v_2 = f^{-1}(y_2) \text{ mit } v \in v_1 \sqcup v_2.$$

Also ist

$$(u, v) \in (f \circ \rho \circ f^{-1}) \sqcup (f \circ \rho \circ f^{-1}).$$

Umgekehrt sei

$$(u, v) \in (f \circ \rho \circ f^{-1}) \sqcup (f \circ \rho \circ f^{-1})$$

und $f(u) \in x_1 \sqcup x_2$.

Für $u_1 = f^{-1}(x_1)$, $u_2 = f^{-1}(x_2)$

gilt dann $u \in u_1 \sqcup u_2$.

Dann folgt

$v \in v_1 \sqcup v_2$ mit $(f(u_1), f(v_1)) \in \rho$ und $(f(u_2), f(v_2)) \in \rho$

$$\longrightarrow f(v) \in f(v_1) \sqcup f(v_2),$$

also

$$(u, v) \in f \circ (\rho \sqcup \rho) \circ f^{-1}. \quad ///$$

Korollar 9:

Für jede charakteristische Kongruenzrelation ρ ist auch $\rho \sqcup \rho$ charakteristisch.

Beweis:

Sei $f \in \text{Aut}(\Sigma^*)$. Wegen $\rho \subseteq f \circ \rho \circ f^{-1}$ ist auch

$$\rho \sqcup \rho \subseteq (f \circ \rho \circ f^{-1}) \sqcup (f \circ \rho \circ f^{-1}) = f \circ (\rho \sqcup \rho) \circ f^{-1} .$$

///

Definition 10:

Mit ξ bezeichnen wir die von $\{(uv, vu) \mid u, v \in \Sigma^*\}$ erzeugte Kongruenzrelation auf Σ^* . $\pi \in \mathcal{C}(\Sigma^*)$ heißt *kommutativ*, falls $\xi \subseteq \pi$. Eine E-Varietät $\mathbb{F}$ heißt *kommutativ*, wenn für jedes $\pi \in \mathbb{F}$ gilt $\xi \subseteq \pi$.

$\mathbb{C} :=$ Menge aller kommutativen Kongruenzrelationen in

$$\mathcal{C}_{\text{fin}}(\Sigma^*)$$

$\underline{\mathbb{C}} :=$ Menge aller endlichen kommutativen Monoide.

Lemma 11:

Es seien $\rho, \sigma \in \mathcal{C}(\Sigma^*)$, $\rho, \sigma \supseteq \xi$

$$1) \quad \rho \sqcup \sigma \supseteq \xi$$

$$2) \quad \rho \in \mathcal{C}(\Sigma^*) \implies \rho \sqcup \rho \subseteq \rho$$

$$3) \quad \xi \sqcup \xi = \xi$$

Beweis:

1) Es seien $x, y \in \Sigma^*$ beliebig und $xy \in [u]_\rho \cup [v]_\sigma$.

Dann gibt es

$$u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n \in \Sigma^*$$

mit $(u, u_1 \cdot \dots \cdot u_n) \in \rho$

$$(v, v_1 \cdot \dots \cdot v_n) \in \sigma$$

$$x = u_1 v_1 \cdot \dots \cdot u_k v_k \quad \text{für } k \leq n$$

$$y = u_{k+1} v_{k+1} \cdot \dots \cdot u_n v_n.$$

Wegen

$$(u, u_1 \cdot \dots \cdot u_n) \in \rho$$

ist auch

$$(u, u_{k+1} \cdot \dots \cdot u_n \cdot u_1 \cdot \dots \cdot u_k) \in \rho$$

und wegen

$$(v, v_1 \cdot \dots \cdot v_n) \in \sigma$$

ist auch

$$(v, v_{k+1} \cdot \dots \cdot v_n \cdot v_1 \cdot \dots \cdot v_k) \in \sigma$$

also ist

$$yx \in [u]_\rho \sqcup [v]_\sigma .$$

Daher folgt

$$\forall u, v \in \Sigma^* \quad xy \in [u]_\rho \sqcup [v]_\rho \iff yx \in [u]_\rho \sqcup [v]_\rho$$

und dies bedeutet

$$(xy, yx) \in \rho \sqcup \sigma .$$

2) Da ρ kommutativ ist, ist für alle $u, v \in \Sigma^*$

$$[u]_\rho \cdot [v]_\rho \subseteq [u]_\rho \sqcup [v]_\rho \subseteq [uv]_\rho .$$

Daher ist für $a \in \Sigma^*$

$$\begin{aligned} [a]_{\rho \sqcup \rho} &= a \in \bigcup_{[u]_{\rho} \sqcup [v]_{\rho}} [u]_{\rho} \sqcup [v]_{\rho} \setminus \\ &\quad \setminus a \in \bigcup_{[u]_{\rho} \sqcup [v]_{\rho}} [u]_{\rho} \sqcup [v]_{\rho} \\ &\subseteq a \in \bigcup_{[u]_{\rho} \sqcup [v]_{\rho}} [uv]_{\rho} = [a]_{\rho} \end{aligned}$$

3) folgt aus 1) und 2).

///

Folgerungen:

- 1) Die Klasse $\mathbb{T}'$ aller kommutativen Äquivalenzrelationen ist $\sqcup$ -abgeschlossen.
- 2) $\mathcal{E}_{\text{fin}}(\Sigma^*) \cap \mathbb{T}'$ ist $\sqcup$ -abgeschlossen.
- 3) $\mathcal{E}_{\text{rat}}(\Sigma^*) \cap \mathbb{T}'$ ist $\sqcup$ -abgeschlossen.

Nach Lemma 11 gibt es für $\rho \in \mathcal{C}(\Sigma^*) \cap \mathbb{T}$ einen kanonischen Homomorphismus

$$\phi : \Sigma^* /_{\rho \sqcup \rho} \longrightarrow \Sigma^* /_{\rho}$$

Dieser hat ähnliche Eigenschaften wie im Falle des Konkatinationsprodukts.

Lemma 12:

Es sei M ein kommutatives Monoid, $\rho \in \mathcal{C}(M)$. Dann ist
 $\rho \sqcup \rho = \rho^2$. Ist M sogar eine Gruppe, so ist $\rho \sqcup \rho = \rho$.

Beweis:

Es gilt:

$$[u]_{\rho} \cdot [v]_{\rho} = [u]_{\rho} \sqcup [v]_{\rho}$$

wobei $\cdot$ die Multiplikation in M bezeichnet.

Also ist $\rho \sqcup \rho = \rho^2$.

Falls M eine Gruppe ist, so ist $\rho^2 = \rho$, also

$$\rho \sqcup \rho = \rho.$$

///

Lemma 13:

Es sei $\rho \in \mathcal{C}(\Sigma^*) \cap \mathbb{T}$.

Dann ist $\phi : \Sigma^* /_{\rho} \sqcup \rho \longrightarrow \Sigma^* /_{\rho}$ injektiv auf den Gruppen
in $\Sigma^* /_{\rho} \sqcup \rho$.

Beweis:

Es ist zu zeigen:

$$(x^2, x) \in \rho \cup \rho, (x, y) \in \rho, [y]_{\rho} \cup \rho \in G_x \implies (x, y) \in \rho \cup \rho,$$

wobei G_x die maximale Gruppe zum Idempotenten $[x]_{\rho} \cup \rho$ bezeichne.

Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $(y^n, x) \in \rho \cup \rho$.

Nun sei $y \in [y_1]_{\rho} \cup [y_2]_{\rho}$.

Da $(x, y) \in \rho$, $(x^2, x) \in \rho \cup \rho \subseteq \rho$, ist auch $(y^2, y) \in \rho$, das heißt, $[y]_{\rho}$ ist das Einselement der Bildgruppe.

Also ist für $r+l = n-1$:

$$y^n \in [y^l y_1]_{\rho} \cup [y_2 y^r]_{\rho} = [y_1]_{\rho} \cup [y_2]_{\rho}.$$

Wegen $(y^n, x) \in \rho \cup \rho$ ist auch $x \in [y_1]_{\rho} \cup [y_2]_{\rho}$.

Umgekehrt sei $x \in [x_1]_\rho \cup [x_2]_\rho$.

Wegen $(x, y^n) \in \rho \cup \rho$ ist $y^n \in [x_1]_\rho \cup [x_2]_\rho$, also

$$y^{n+1} \in [yx_1]_\rho \cup [x_2]_\rho.$$

$[x]_\rho \cup \rho$ ist das Einselement in G_x , also folgt aus $(x, y^n) \in \rho \cup \rho$

$$(y, y^{n+1}) \in \rho \cup \rho.$$

Also gilt

$$y \in [yx_1]_\rho \cup [x_2]_\rho,$$

und da $[y]_\rho$ das Einselement der Bildgruppe ist, erhält man

$$y \in [x_1]_\rho \cup [x_2]_\rho.$$

Also folgt insgesamt

$$(x, y) \in \rho \cup \rho.$$

///

Theorem 14:

Für jede G-Varietät $\underline{G}'$ gilt:

Die der M-Varietät $(\underline{G} \xrightarrow{M} \underline{G}') \cap \underline{C}$ entsprechende E-Varietät ist $\sqcup$ -abgeschlossen.

Beweis:

Sei $\rho \in \mathcal{C}(\Sigma^*)$ mit $\Sigma^*/_{\rho} \in (\underline{G} \xrightarrow{M} \underline{G}') \cap \underline{C}$.

Dann gilt $\rho \sqcup \rho \in \mathcal{C}(\Sigma^*)$, $\rho \sqcup \rho \leq \rho$

und nach Lemma 13 ist jede Gruppe G , die in $\Sigma^*/_{\rho \sqcup \rho}$ enthalten ist, eine Untergruppe einer Gruppe H , die in $\Sigma^*/_{\rho}$ enthalten ist. Da H zu $\underline{G}'$ gehört, gehört auch G zu $\underline{G}'$, also folgt mit Lemma 11:

$$\Sigma^*/_{\rho \sqcup \rho} \in \left(\underline{G} \xrightarrow{M} \underline{G}' \right) \cap \underline{C} \quad ///$$

Wie beim Konkatinationsprodukt kann man die Ergebnisse für M-Varietäten und ihre zugehörigen E-Varietäten übertragen auf S-Varietäten und ihre zugehörigen E-Varietäten, indem man für $\rho, \sigma \in \mathcal{E}(\Sigma^+)$ definiert:

$$\rho \cup \sigma = \rho^1 \cup \sigma^1 \quad , \quad (\cdot, \cdot) \quad .$$

Literatur

- [1] Bernschneider, P.:
Sprachen mit "GREEN"-trivialem syntaktischem Monoid,
Diplomarbeit, Erlangen (1979)

- [2] Brzozowski, J.A. - Fich, F.E.
Languages of R-trivial Monoids. Univ. of Waterloo
Res. Rep. CS-78-32 (1978)

- [3] Cohn, P.M.:
Universal Algebra, Harper & Row (1965)

- [4] Eilenberg, S.:
Automata, Languages and Machines, Vol. B. Academic
Press (1979)

- [5] König, R.:
Right-testable Events, unveröffentlicht (1980)

- [6] Lallement, G.:
Semigroups and Combinatorial Applications,
John Wiley & Sons (1979)

- [7] McNaughton, R. - Papert, S.:
Counter-free Automata, MIT-Press (1971)

- [8] Perrin, D.:
Sur certains Semigroupes Syntaxiques, Séminaires
de l'I.R.I.A., Logiques et Automates (1971), 169 - 177.

- [9] Perrot, J.F.:
Variétés de Langages et Opérations, TCS 7 (1978),
197 - 210.

- [10] Pin, J.E.:
Variétés de Langages et Variétés Semigroupes (Thèse
d'Etat) LITP-Publ. 81 - 19 (1981)

- [11] Schützenberger, M.P.:
Sur Certaines Variétés de Monoides Finis, in Automata
Theory (Caianiello ed.) Academic Press (1966)

- [12] Simon, I.:
Piecewise testable Events, Proc. 2nd GI-Conf.,
Lecture Notes in CS 33, Springer, (1975), 214 - 222.

- [13] Straubing, H.:
Aperiodic Homomorphisms and the Concatenation Product
of Recognizable Sets. J. Pure and Appl. Algebra 15,
(1979), 319 - 327.

- [14] Thérien, D.:
Classification of Finite Monoids: The Language
Approach, TCS 14 (1981), 195 - 208.

[15] Thue, A.:

Über die gegenseitige Lage gleicher Teile gewisser
Zeichenreihen, Videnskabselskabets Skrifter,
I. Mat. - Nat. Kl., Kristiania (1912)

Lebenslauf

Name: König
Vornamen: Roman Erwin
geboren: 19.12.44 in Dux, CSR
Eltern: Erwin und Emma König

1950-1954: Volksschule Dietenhofen/Mfr.

1954-1963: Martin-Behaim-Oberrealschule Nürnberg
Abschluß: Abitur.

1963-1965: Wehrdienst bei der Luftwaffe.

1965-1971: Studium der Mathematik in Erlangen
Abschluß: Diplom.

1971-1973: VDWA am IMMD (III).

Seit 1973: VDWA bzw. Wiss. Angest. (seit 1974)
am IMMD I

Verheiratet seit 1971, zwei Kinder.

In letzter Zeit sind folgende Arbeitsberichte des Instituts für
Mathematische Maschinen und Datenverarbeitung erschienen:
=====

Band 13
=====

- Nr. 1 Schrammel, D., Bayer, W., Gliemann, H.-P., Heigl, M.,
Mertens, P.:
Ein Leistungs- und Wirtschaftlichkeitsvergleich zwischen
Klein- und Großcomputern
(Januar 1980)
- Nr. 2 Göttler, H.:
Semantische Modelle
(März 1980)
- Nr. 3 Fromm, H.J.:
Zur Modellierung der Speicherinterferenz bei hierarchisch
organisierten Multiprozessorsystemen
(April 1980)
- Nr. 4 Jäpel, D.:
Klassifikatorbezogene Merkmalsauswahl
(Juli 1980)
- Nr. 5 Bodendorf, F., Mertens, P., Haas, R., Weber, G. Wolf, G.:
SAMBA - ein Methodenbankrahmen um das Statistik-Paket SPSS
(Juli 1980)
- Nr. 6 Bartsch, B.:
Inferenz und Analyse spezieller Graphgrammatiken für die
syntaktische Mustererkennung
(September 1980)
- Nr. 7 Wurm, F.X.:
Auftragssystem für eine Mehrprozessoranlage
(Oktober 1980)
- Nr. 8 Schedelbeck, A.:
Vergleich der beiden höheren Realzeitprogrammiersprachen
ADA und PEARL.
(Oktober 1980)
- Nr. 9 Jahresbericht 1980 der Informatik.
(März 1981)

- Nr. 1 Pattern Recognition
(Research at Lehrstuhl für Informatik 5)
(Februar 1981)
- Nr. 2 Bunke, H.:
Analyse elektrischer Schaltpläne
(März 1981)
- Nr. 3 Linster, C.-U.:
SYMPOS/UNIX - Ein Betriebssystem für homogene
Polyprozessorsysteme
(Juni 1981)
- Nr. 4 Akyildiz, J.F., Bolch, G.:
Analytic Solution Techniques for Queueing Network
Models of Computer Systems
(Juli 1981)
- Nr. 5 Lindstedt, W.G.:
Ein Verfahren zur Erstellung portabler algorithmischer
Laufzeitprogramme
(Juli 1981)
- Nr. 6 Vollmar, R.:
Zum Begriff des Parallelismus bei Polyautomaten
(Juli 1981)
- Nr. 7 Luft, A.L.:
Rationaler Sprachgebrauch und orthosprachliche
Standardisierung als Grundlagen zuverlässiger Software-
Entwicklung und -Dokumentation
(Januar 1982)

Band 14 Fortsetzung
=====

Nr. 8 Händler, W.:

PROCEEDINGS OF A WORKSHOP ON TAXONOMY IN COMPUTER
ARCHITECTURE
(Februar 1982)

Nr. 9 Beth, Th., Hess, P., Wirl, K.:

Materialien zur Kryptographie
(März 1982)

Nr. 10 Jahresbericht 1981 der Informatik

(März 1982)

- Nr. 1 Wittmann, A.:
Ein Mechanismus für die Synchronisation paralleler
Prozesse
(Februar 1982)
- Nr. 2 Maehle, E.:
Fehlertolerantes Verhalten in Multiprozessoren -
Untersuchungen zur Diagnose und Rekonfiguration
(März 1982)
- Nr. 3 Bathelt, P.:
Vergleich von Synchronisationsmechanismen
(Mai 1982)
- Nr. 4 Keramidis, S.:
Eine Methode zur Spezifikation und korrekten
Implementierung von asynchronen Systemen
(Juni 1982)
- Nr. 5 Fromm, H.J.:
Multiprozessor-Rechenanlagen:
Programmstrukturen, Maschinenstrukturen und Zuordnungs-
probleme
(Mai 1982)
- Nr. 6 Bley, H.:
Vorverarbeitung und Segmentierung von Stromlaufplänen
unter Verwendung von Bildgraphen
(Juli 1982)
- Nr. 7 Hohl, W.:
Informatik-Sammlung
Katalog mit historischen Erläuterungen
(August 1982)
- Nr. 8 Messerer, M.:
Ein neuer Ansatz zur Parallelisierung von
Compilern
(August 1982)

Band 15 Fortsetzung
=====

- Nr. 9 Grosch, J.:
Eine Programmiersprache mit mengentheoretischen
Konstrukten und deren effiziente Implementierung
(August 1982)
- Nr.10 Kleinöder, W.:
Stochastische Bewertung von Aufgabenstrukturen
für hierarchische Mehrrechnersysteme
(August 1982)
- Nr.11 Kneißl, F.:
Realisierung von Makro-Datenflußmechanismen auf
hierarchischen Mehrrechnersystemen
(August 1982)
- Nr.12 Brendel, W., Fan, Z., Klar, R., Schmielau, W.:
ERES 82
Handbuch und Fallstudie
Handbook and Case Study
(Oktober 1982)
- Nr.13 Pelz, K.:
Portable Codegenerierung in Übersetzern
für Prozess-Programmiersprachen
(Oktober 1982)
- Nr.14 Sommer, U., Steinchen, J.:
Ein Kleinrechner-Grafiksystem zur Dokumentation
von EDV-Abläufen
(Oktober 1982)
- Nr.15 Hein, H.-W.:
Das Erlanger Spracherkennungssystem
(November 1982)

Band 15 Fortsetzung
=====

- Nr. 16 Bolch, G., Bruchner, W.:
Analytische Modelle für symmetrische Mehrprozessor-
anlagen mit dynamischen Prioritäten
(Dezember 1982)
- Nr. 17 Jahresbericht 1982 der Informatik
(März 1983)

Band 16
=====

Nr. 1 Gall, R.:
Formale Beschreibung des inkrementellen Programmierens-
im-Großen mit Graph-Grammatiken
(März 1983)

